

---

## Examen Instrumentation : optique & chaîne de détection

---

- Durée : 2h30.
- Conseil : pas plus de **5 minutes** par exercice.
- Barème indicatif : exercices  $\simeq 25 - 30\%$ , problème  $\simeq 70 - 75\%$
- Les différentes parties du problème sont *très largement indépendantes* les unes des autres.
- Rédaction : concise et précise, svp, avec des schémas clairs et pertinents.
- **Donner une expression analytique avant toute application numérique.**

---

### Formulaire (réduit):

$$1'' = 4,85 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

---

#### 1. Exercices

- 1.1.** Le plus grand télescope du monde est Chinois. Surnommé FAST, il possède un diamètre de 500 m. Ce télescope observe la lumière dans une fourchette de fréquences allant de 0,07 à 3 GHz.
- a. À quelles longueurs d'onde correspondent ces fréquences ? S'agit-il de longueur d'onde UV, visible, infrarouge ou radio ?
  - b. Donner la définition du critère de résolution de Rayleigh. Calculer la résolution du télescope. L'indiquer en secondes d'angle.
  - c. La précision en résolution d'un tel télescope est-elle supérieure ou inférieure à la résolution d'un VLT (de diamètre 8 m, observant aux longueurs d'ondes du visible) ? Justifier la réponse.
- 1.2.** Dans le cas d'un télescope de pupille circulaire de diamètre  $D$  la fonction d'étalement de point (FEP) s'écrit sous la forme :

$$\text{FEP}(\alpha) = \left| \frac{J_1(2\pi a \alpha / \lambda)}{2\pi a \alpha / \lambda} \right|^2 \quad (1)$$

- a. Que représente cette fonction ? L'angle  $\alpha$  étant en radians, quelle est la relation entre  $a$  et  $D$  ?
- b. La fonction de transfert optique (FTO) s'écrit sous la forme :

$$\text{FTO}(u) = \frac{2}{\pi} \left( \arccos(b.u) - b.u \sqrt{1 - (b.u)^2} \right) \quad (2)$$

avec  $u$  en  $\text{radian}^{-1}$ . Quelle est la relation entre  $b$  et  $D$  ?

- c. Quelle est la relation entre la FTO et la FEP ? Sur un croquis, représenter schématiquement la forme de la FTO. Que vaut la fréquence de coupure ? À quel intervalle de fréquence le télescope est-il sensible ?

### 1.3. Atmosphère et optique adaptative

- Rappeler brièvement (deux phrases maximum) la définition du paramètre de Fried  $r_0$ . Quelle est la relation entre  $r_0$  et  $\tau_0$ , le temps de cohérence ?
- En l'absence d'optique adaptative, comment évolue la résolution du télescope avec le paramètre Fried ?
- La paramètre  $r_0$  dépend de la longueur d'onde : il croît comme  $\lambda^{6/5}$ . Comment évolue la résolution du télescope avec  $\lambda$  ?
- On suppose une atmosphère caractérisée par  $r_0$  et  $\tau_0$  de, respectivement, 32 cm et 5 ms à une longueur d'onde de  $2.2 \mu\text{m}$ . Dans ces conditions, pour un télescope de diamètre 8 m, dimensionner une optique adaptative (nombre d'activateurs et fréquence d'échantillonnage) en justifiant le(s) choix fait(s).
- Refaire les mêmes calculs, mais dans le cas où l'on voudrait dimensionner cette optique adaptative à la longueur d'onde 630 nm.

## 2. Problème : quelques dimensionnements de la mission KEPLER

Kepler est une mission de la NASA dédiée à la recherche de transits exoplanétaires, lancée en avril 2009. Le sujet qui suit propose une étude de quelques-unes de ses caractéristiques.

### 2.1. Le collecteur : montage et focale

La figure 1 montre le télescope avec le bloc de détection.

- D'après la figure 1, quel type d'observations Kepler peut-il réaliser : astrométrie, photométrie, spectrométrie, ou bien ... ?
- À quel type de miroir idéal correspond l'association de la lame d'entrée (Schmidt corrector = correcteur de Schmidt = lame avec une surface plane et une surface très légèrement asphérique) et du miroir primaire M1 sphérique ?
- Proposer un schéma équivalent au montage optique de Kepler, avec une lentille simple.
- Estimer, d'après les données de la Table 1, la focale équivalente  $f$  du montage optique de Kepler.

A.N. Calculer  $f$ .

lame de Schmidt	diamètre $a_S$	0.95 m
miroir primaire, sphérique	diamètre $a_{M1}$	1.40 m
Nombre de CCD	$n_{\text{CCD}}$	42
CCD	taille	$1024 \times 2200$
Pixel carré, de côté	$p$	$27 \mu\text{m}$
Champ de vue d'un pixel	$\alpha$	4.0 "
Capacité de puits d'un pixel	$N_p$	$1.2 \cdot 10^6 e^-$
Temps d'intégration	$\tau_{\text{int}}$	5.5 s
Temps de lecture	$\tau_{\text{lec}}$	0.5 s
Cadence longue	$\tau_\ell$	30 min
Cadence courte, ou rapide	$\tau_c$	1 min

Table 1: Kepler : quelques données fournies par la NASA

## 2.2. Le collecteur : ouverture

- a. Quelle pièce optique joue le rôle de diaphragme d'ouverture ? Estimer, d'après les données de la Table 1, le diamètre  $a$  de la pupille d'entrée.
- b. Les spécifications du projet indiquent pour le collecteur un nombre d'ouverture  $n_{\text{ouv}} = 1.473$ . Est-il respecté ?

## 2.3. Le collecteur : champ

- a. Estimer, d'après la figure 1 et d'après les données de la Table 1, l'ordre de grandeur du diamètre du champ total  $A$  collecté sur le ciel par les  $n_{\text{CCD}}$  CCD.
- A.N. Calculer l'ordre de grandeur de  $A$  en degré.
- b. Quels éléments peuvent diaphragmer le champ ? Pour quelle raison le miroir présente-t-il un plus grand diamètre que la lame de Schmidt ? La comparaison des diamètres vous semble-t-elle en accord avec le champ de vue total (si besoin, on notera  $D_1$  la distance entre la lame de Schmidt et le miroir M1, et  $D_2$  celle entre M1 et le détecteur) ?
  - c. Pour quelle raison le plan focal est-il incurvé (Fig. 1) ?

## 2.4. Le collecteur : tache image

- a. Le bloc détecteur obstrue 23 % de la pupille. Faire un schéma de la tache de diffraction tenant compte de cette obstruction centrale.
- A.N. Dimensionner le pic principal de la tache de diffraction en lumière visible à  $0.6 \mu\text{m}$ .
- b. Ce télescope spatial observe-t-il à la limite de diffraction, d'après l'allure des taches images (Fig. 2) ?

## 2.5. Photométrie

La Figure 3 représente les transmissions des différentes pièces optiques. On note  $\eta$  la transmission totale moyenne, donnée par la courbe 5 de la figure 3, et  $\Delta\lambda$  la bande passante.

- A.N. Proposer un ordre de grandeur de  $\eta$  et  $\Delta\lambda$ .
- a. En bande  $V$ , correspondant au domaine visible entourant la couleur verte ( $0.55 \mu\text{m}$ ), le nombre de photons reçus d'une étoile de magnitude  $m$  par unités de temps, de surface et de bande spectrale s'écrit :  
$$n = N_V 10^{-0.4m}$$
avec  $N_V \simeq 10^8 \text{ photons s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$ .
  - b. Estimer le nombre de photons  $\mathcal{N}$  reçus, pour une étoile de magnitude  $m$ , par une surface de collecte  $S$  pendant la durée  $\Delta t$  dans la bande spectrale  $\Delta\lambda$ , en tenant compte de l'efficacité moyenne  $\eta$  de toute la chaîne de détection.
- A.N. Calculer  $\mathcal{N}$  pour une étoile de magnitude 10 observée par Kepler, pour une durée d'intégration  $\tau_{\text{int}}$ , en estimant  $\Delta\lambda$  et  $\eta$  d'après la figure 3.
- c. Estimer le nombre de photo-électrons dans une tache image de  $n_{\text{PSF}}$  pixels pendant la durée d'observation  $\Delta t$ . Estimer  $n_{\text{PSF}}$  d'après la figure 2. Le nombre de photo-électrons à intégrer est-il en accord avec les caractéristiques du CCD ?

## 2.6. Modes d'observation

Toutes les données scientifiques sont acquises avec un temps d'intégration  $\tau_{\text{int}}$  et une lecture de durée  $\tau_{\text{lec}}$ , pour une cadence élémentaire  $\tau = \tau_{\text{int}} + \tau_{\text{lec}}$ . Deux modes de transfert des données du satellite vers les stations au sol sont prévus, de cadence plus ou moins rapide,  $\tau_c$  et  $\tau_\ell$ .

- a. Justifier l'intérêt de transmettre les données du satellite vers le sol à une cadence plus lente que la cadence élémentaire  $\tau$ .

La plupart des programmes d'ampleur de Kepler reposent sur la découverte de phénomènes qui durent typiquement quelques heures. Les très nombreuses étoiles du programme scientifique sont suivies en permanence à la cadence lente  $\tau_\ell$ ; les étoiles, beaucoup moins nombreuses, pour lesquelles est découvert un événement intéressant sont ensuite observées à la cadence rapide  $\tau_c$ .

- b. Justifier la valeur  $\tau_\ell$  de la cadence longue.
- c. Quel(s) avantage(s) apporte la cadence rapide  $\tau_c$  ?

Le programme scientifique secondaire, l'astérosismologie, nécessite le calcul du spectre, par transformée de Fourier, des séries temporelles acquises selon les cadences rapide ou lente pour une séquence continue de durée  $T$ .

- d. Définir et déterminer les deux fréquences caractéristiques du spectre de Fourier en fonction de la cadence d'observation longue  $\tau_\ell$  et de la durée totale d'observation  $T$ .

A.N. Donner les valeurs numériques de ces fréquences caractéristiques pour la cadence longue et une durée d'observation continue totale  $T_{\text{mission}} = 4$  ans.

## 2.7. Télémétrie et bruits

Pour toute cette question, on s'intéresse au bruit par pixel par lecture élémentaire de durée  $\tau$ . On note  $\sigma_{\text{lec}}$  le bruit de lecture,  $\sigma_{\text{obsc}}$  le bruit de courant d'obscurité,  $N$  le nombre de photo-électrons enregistrés par lecture.

- a. Donner l'expression du bruit total  $\sigma$ , puis l'expression du rapport signal à bruit de la détection.
- b. Le courant d'obscurité est estimé à  $1 \text{ e}^- \text{ pix}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , alors que  $\sigma_{\text{lec}} = 95 \text{ e}^- \text{ pix}^{-1}$ . Que peut-on en déduire ?
- c. Pour quelles valeurs de  $N$  peut-on considérer que le bruit de lecture est négligeable (ici, "négligeable" signifie que le bruit de lecture est inférieur au cinquième du bruit de photons) ?

A.N. Faire l'application numérique, pour  $\sigma_{\text{lec}} = 95 \text{ e}^- \text{ pix}^{-1}$ . Quelle fraction du bruit total représente le bruit de lecture dans le cas limite (1/4 du bruit de photons) ? A quelle fraction de la capacité de puits correspond le signal dans le cas limite ?

- d. Définir puis calculer les rapports signal à bruit minimal et maximal par pose.

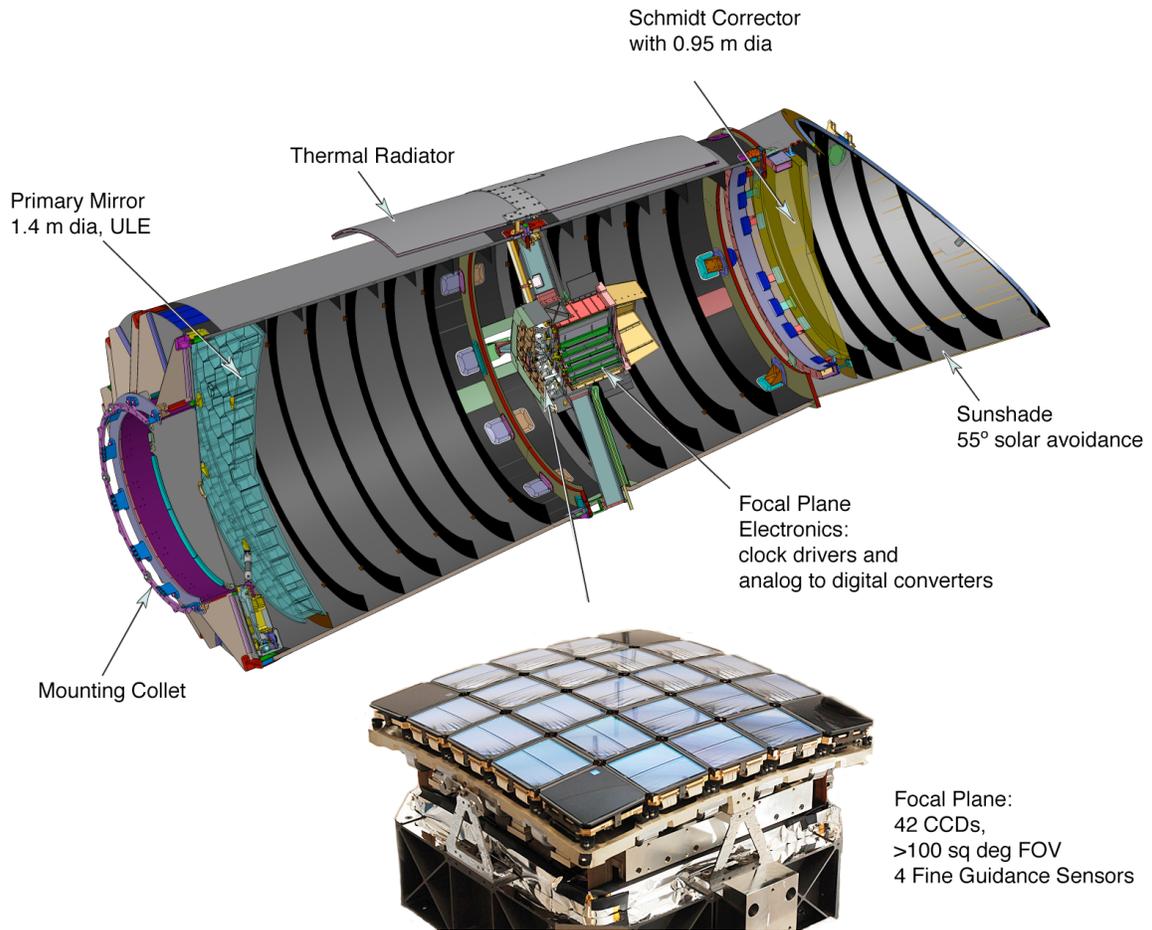


Figure 1: Schéma optique de Kepler. Schmidt corrector = lame de Schmidt ; Sunshade = bouclier ; Focal plane = plan focal.

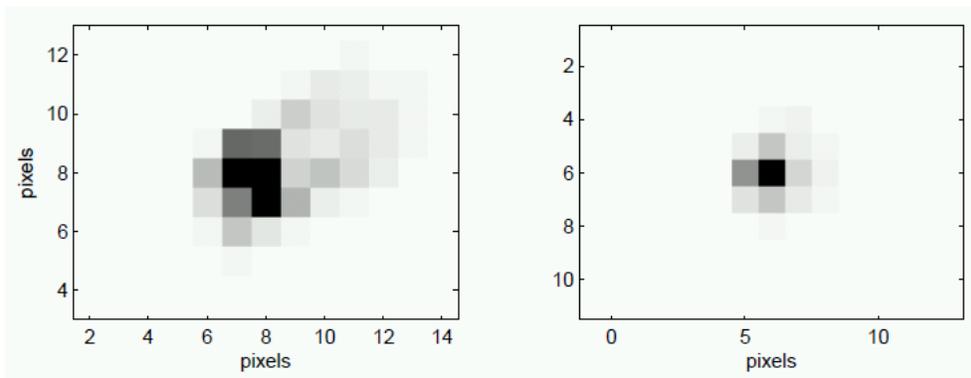


Figure 2: Fonction d'étalement du point de Kepler, en bordure du champ (image de gauche) ou au centre du champ (image de droite).

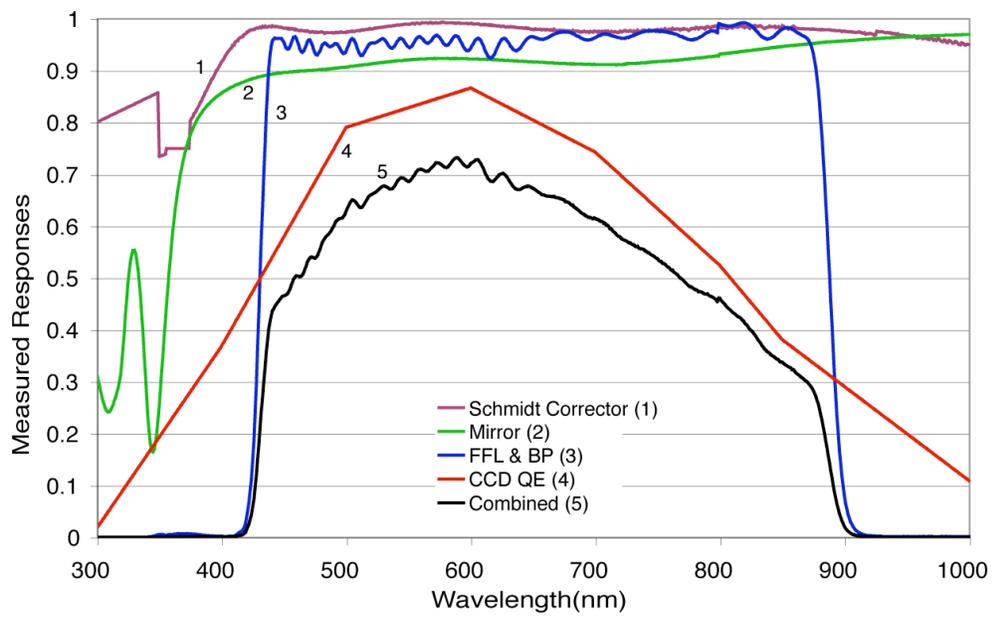


Figure 3: Transmission des différentes pièces optiques et rendement total de transmission et détection (courbe 5).