Physique des plasmas

Arnaud Zaslavsky

19 septembre 2025

Master Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale

Table des matières

1 Chapitre 1 : Echelles et phénomènes collectifs

1.1 Capacité d'une sphère conductrice dans un plasma

Nous considérons une sphère de rayon a, dans un plasma constitué d'ions de charge $+e$ et de densité n_i et d'électrons de densité n_e. A l'infini (très loin de la sphère), on a $n_e = n_i = n_0$. Le problème présente une symétrie sphérique par rapport au centre de la sphère, les densités ne dépendent donc que de la distance r à ce centre.

Nous voulons calculer la capacité de la sphère. Pour cela, nous supposons un dispositif qui la maintient à un potentiel V par rapport à « l'infini » - le potentiel lointain étant celui du plasma non perturbé, que nous supposons égal à 0.

1. Calculez le potentiel $\varphi(r)$ autour de la sphère, en supposant un régime quasi-statique pour les ions et les électrons. (Astuce : vous pouvez introduire $\psi(r) = r\varphi(r)$ pour simplifier l'équation de Poisson en coordonnées sphériques, et résoudre pour ψ).

   Nous utilisons l'équation de Boltzmann pour la distribution spatiale des ions et électrons, et linéarisons en supposant que l'énergie cinétique des populations est grande devant l'énergie électrostatique. On obtient
   $$\Delta\varphi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\varphi(r) = \frac{\varphi(r)}{\lambda_D^2} \quad (1)$$
   avec $\lambda_D^2 = 2\varepsilon_0 kT/n_0e^2$. On introduit $\psi = r\varphi(r)$, l'équation prend la forme
   $$\frac{d\psi}{dr} = \frac{\psi}{\lambda_D^2} \Rightarrow \psi = Ae^{-r/\lambda_D} + Be^{r/\lambda_D} \quad (2)$$
   La condition à l'infini impose que $B = 0$. D'où
   $$\varphi(r) = \frac{aV}{r}e^{-(r-a)/\lambda_D} \quad (3)$$
   où la constante A a été déterminée de la condition à la limite $\varphi(a) = V$.
2. Calculez la charge portée par la sphère, en supposant la neutralité globale du système sphère + plasma.
   La charge dans la gaine (la partie non-neutre autour de la sphère) vaut
   $$Q_{gaine} = \int \rho dV = \int_a^\infty -\frac{\varepsilon_0\varphi(r)}{\lambda_D^2}4\pi r^2 dr = -4\pi\varepsilon_0 aV\left(1+\frac{a}{\lambda_D}\right) \quad (4)$$
   et la charge de la sphère et donc $Q_{sphere} = -Q_{gaine} = -aV\left(1+\frac{a}{\lambda_D}\right)$.
3. Déduisez en la capacité de la sphère conductrice. En quoi est-elle différente de la capacité d'une sphère dans le vide ?
   La capacité de la sphère est
   $$C_{plasma} = Q_{sphere}/V = 4\pi\varepsilon_0 a\left(1+\frac{a}{\lambda_D}\right) = C_{vacuum}\left(1+\frac{a}{\lambda_D}\right) \quad (5)$$

Ainsi, elle est multipliée par un facteur $1 + a/\lambda_D$ par rapport à la capacité dans le vide. Si le rayon de la sphère est petit par rapport à la longueur de Debye, la sphère a sa capacité dans le vide. Mais si le rayon de la sphère est beaucoup plus grand que λ_D, la capacité est augmentée d'un facteur a/λ_D, qui peut être énorme dans la pratique. Dans ce dernier cas, nous retrouvons la capacité $C = \varepsilon_0 S/e$ d'un condensateur plan avec une surface $4\pi a^2$ et un espacement entre les armatures $e = \lambda_D$.

1.2 Champ électrique de Pannekoek-Rossland

On considère une sphère de plasma en auto-gravitation (une étoile...), de masse M et de rayon R. On suppose la symétrie sphérique et le problème stationnaire.

1. Reliez le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en tout point de l'étoile à l'accélération de la pesanteur $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ à ce même point.
   La quasi-neutralité du plasma impose que le champ compense les écarts de densité entre ions et électrons dus à leur différence de masse (cf. cours, section champ électrique ambipolaire). Pour cela on doit avoir $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -m_i\mathbf{g}(\mathbf{r})/2e$.
2. En déduire le lien entre la charge totale Q de l'étoile et sa masse M.
   Ce champ électrique, s'il est de divergence non-nulle, doit être accompagné d'une charge d'espace $\rho = \varepsilon_0 \mathrm{div}\ \mathbf{E}$ (on voit d'ailleurs que quasi-neutralité d'implique pas exacte neutralité...). On a donc ici
   $$\rho = -\frac{\varepsilon_0 m_i}{2e}\mathrm{div}\ \mathbf{g} = \frac{\varepsilon_0 m_i}{2e} \times 4\pi G \rho_M \tag{6}$$
   où on a utilisé le théorème de Gauss de la gravitation $\mathrm{div}\ \mathbf{g} = -4\pi G\rho_M$ et $\rho_M(\mathbf{r})$ est la densité de masse locale de l'étoile. On en déduit la charge totale en intégrant sur tout le volume,
   $$Q = \frac{2\pi G \varepsilon_0 m_i}{e} M \tag{7}$$
3. Donnez l'expression du champ électrique (dit *de Pannekoek-Rossland*) à l'extérieur de l'étoile.
   Le théorème de Gauss donne simplement le champ électrique,
   $$\mathbf{E}_{PR} = \frac{GMm_i}{2er^2}\mathbf{u}_r \tag{8}$$
   où $\mathbf{u}_r$ est le vecteur unitaire radial. On note que la force électrique résultante revient à diviser la masse gravitationnelle des ions par deux, et à conférer aux électrons une masse gravitationnelle égale à celle des ions.

1.3 Diffusion ambipolaire

Nous considérons le mouvement diffusif d'un nuage de plasma dans un gaz neutre infini, homogène, de densité n_n. Nous considérons que les collisions entre les particules de plasma et le gaz neutre produisent une force de frottement $\mathbf{f}_\alpha = \nu_\alpha \mathbf{u}_\alpha$. Avec $\nu_\alpha \equiv v_{th,\alpha}/\lambda$ la fréquence de collision entre les neutres et l'espèce α ($\alpha = i, e$, pour les ions et électrons, resp., et λ est une constante (le libre parcours moyen), qu'on supposera identique pour toutes les espèces). Nous supposons que la friction domine la convection, de sorte que le mouvement de la population α est décrit par l'équation

$$0 = -kT\nabla n_\alpha + n_\alpha q_\alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}) - n_\alpha \nu_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \tag{9}$$

1. Exprimez la vitesse moyenne $\mathbf{u}_\alpha$ de chaque population.
   On a
   $$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{kT}{m_\alpha \nu_\alpha}\frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} \tag{10}$$

2. On suppose le champ électrique nul. Exprimez dans ce cas le coefficient de diffusion de chaque population D_α, en faisant apparaitre explicitement la masse m_α.
   Le coefficient de diffusion est le terme qui apparait devant le terme proportionnel au gradient de densité dans l'équation précédente (utiliser l'équation de continuité pour l'espèce α pour le montrer). On a donc ici
   $$D_\alpha = \frac{kT}{m_\alpha \nu_\alpha} = v_{th,\alpha}\lambda \propto 1/\sqrt{m_\alpha} \tag{11}$$

3. Quel problème identifiez-vous ? Quelle(s) condition(s) doit-on imposer afin de résoudre ce problème ?
   Le problème viendrait de la valeur très différente des coefficients de diffusion pour les électrons et les ions. Le rapport entre les coefficients de diffusion des ions et des électrons est
   $$\frac{D_i}{D_e} \simeq \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \ll 1 \tag{12}$$
   Ainsi, les électrons diffusent beaucoup plus rapidement que les ions et une charge spatiale devrait apparaître rapidement dans le plasma. Cette charge spatiale produirait un champ électrique, qui devrait être pris en compte de manière cohérente dans la dynamique des populations chargées.

4. Quel est le coefficient de diffusion (dit *ambipolaire*) réel du plasma dans le gaz neutre ?
   La valeur du coefficient de diffusion peut être obtenue en tenant compte du champ électrique dans l'équation du mouvement et en posant l'hypothèse de quasi-neutralité $n_i = n_e \equiv n$ et l'hypothèse de courant nul $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_e = \mathbf{u}$. En additionnant l'équation pour les ions et les électrons, on fait disparaître le champ électrique et on obtient l'équation
   $$0 = -2kT\nabla n + n(m_i\nu_i + m_e\nu_e)\mathbf{u} \tag{13}$$

à partir de laquelle nous dérivons le coefficient de diffusion ambipolaire

$$D = 2kT/(m_i\nu_i + m_e\nu_e) \simeq 2kT/m_i\nu_i \tag{14}$$

Nous pouvons voir que cela correspond au double du coefficient de diffusion de l'espèce ionique, si celle-ci avait été neutre. Le champ électrique dans le plasma, qui maintient l'électroneutralité en accélérant la diffusion des ions et décélérant celle des électrons vaut

$$\mathbf{E} \simeq \frac{\nu_i m_i}{2e}\mathbf{u} \tag{15}$$

1.4 Diélectrique et modes d'oscillation dans un plasma chaud

Nous avons dans le cours calculé la valeur de la fonction diélectrique ε_ω du plasma dans un cas très simplifié, en négligeant tout effet thermique en particulier. Ici, on cherche à calculer le dielectrique dans le cas où les électrons ont une pression non-nulle, mais en conservant l'hypothèse simplificatrice d'ions immobiles, et d'un problème purement électrostatique. La population d'électron est caractérisée par sa densité n_e, sa vitesse moyenne $\mathbf{u}_e$ et sa pression p_e. Cette dernière est reliée à la densité par une relation de fermeture de type polytropique, $d_t(p_e n_e^{-\gamma}) = 0$. La population ionique est caractérisée par sa densité n_i, et sa charge $q_i = +e$.

1. Exprimez les équations décrivant l'évolution du fluide électronique (conservation du nombre de particules, et conservation du moment).
   Les équations sont

$$\partial_t n_e + \text{div } n_e\mathbf{u}_e = 0 \qquad \text{Continuité} \tag{16}$$

$$n_e m_e\left(\partial_t + \mathbf{u}_e\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_e = -en_e\mathbf{E} - \nabla p_e. \qquad \text{Conserv. impulsion} \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(p_e n_e^{-\gamma}\right) = 0 \qquad \text{Fermeture polytrope} \tag{18}$$

2. Linéarisez ces équations en supposant que $n_e = n_0 + \tilde{n}_e(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{u}_e = \tilde{\mathbf{u}}_e(\mathbf{r},t)$, $T_e = T = const.$, $n_i = n_0$ et $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$. Les grandeurs notées avec des tildes étant de "petites perturbations". Les équations linéarisées sont

$$\partial_t\tilde{n}_e + n_0\text{div }\tilde{\mathbf{u}}_e = 0 \qquad \text{Continuité} \tag{19}$$

$$m_e\partial_t\tilde{\mathbf{u}}_e = -e\tilde{\mathbf{E}} - \frac{kT}{n_0}\nabla\tilde{n}_e. \qquad \text{Conserv. impulsion} \tag{20}$$

$$\tilde{p}_e = \gamma kT\tilde{n}_e = \gamma m_e v_{th}^2\tilde{n}_e \qquad \text{Fermeture polytrope} \tag{21}$$

3. Calculez la susceptibilité du plasma dans ce cas, $\boldsymbol{\chi}_{\omega\mathbf{k}}$ (on "algébrisera" les équations en se plaçant dans l'espace de Fourier).
   Le vecteur polarisation est lié à la densité de courant par
$$\tilde{\mathbf{P}}_{\omega\mathbf{k}} = \frac{\tilde{\mathbf{j}}_{\omega\mathbf{k}}}{-i\omega} = -\frac{ien_0}{\omega}\tilde{\mathbf{u}}_{e,\omega\mathbf{k}} \tag{22}$$
   Exprimons la perturbation de vitesse $\tilde{\mathbf{u}}_{e,\omega\mathbf{k}}$ grâce à l'équation de conservation de l'impulsion
$$-i\omega\tilde{\mathbf{u}}_{e,\omega\mathbf{k}} = -\frac{e}{m_e}\tilde{\mathbf{E}}_{\omega\mathbf{k}} - \frac{\gamma v_{th}^2}{n_0}i\mathbf{k}\tilde{n}_{e,\omega\mathbf{k}} \tag{23}$$
   On exprime la perturbation de densité grâce à l'équation de continuité
$$\tilde{n}_{e,\omega\mathbf{k}} = \frac{n_0}{\omega}\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{e,\omega\mathbf{k}} \tag{24}$$
   Ce qui nous permet d'avoir la perturbation de vitesse en fonction du champ électrique
$$-i\omega\tilde{\mathbf{u}}_{e,\omega\mathbf{k}} = -\frac{e}{m_e}\tilde{\mathbf{E}}_{\omega\mathbf{k}} - i\frac{\gamma v_{th}^2}{\omega}\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{e,\omega\mathbf{k}} \tag{25}$$
   et donc
$$\omega^2\left(\mathbf{I} - \frac{\gamma v_{th}^2}{\omega^2}\mathbf{k}\mathbf{k}\right)\tilde{\mathbf{P}}_{\omega\mathbf{k}} = -\frac{e^2 n_0}{m_e}\tilde{\mathbf{E}}_{\omega\mathbf{k}} \tag{26}$$
   On peut inverser le tenseur entre paranthèses, et obtenir pour $\boldsymbol{\chi}_{\omega\mathbf{k}}$ sous sa forme tensorielle.
$$\tilde{\mathbf{P}}_{\omega\mathbf{k}} = -\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(\mathbf{I} + \frac{\gamma v_{th}^2\mathbf{k}\mathbf{k}}{\omega^2 - \gamma v_{th}^2 k^2}\right)\tilde{\mathbf{E}}_{\omega\mathbf{k}} = \epsilon_0\boldsymbol{\chi}_{\omega\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} \tag{27}$$
   On sépare en général les parties longitudinales ($\propto \mathbf{k}\mathbf{k}$) et transverses ($\propto (\mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k})$),
$$\tilde{\mathbf{P}}_{\omega\mathbf{k}} = \epsilon_0\left(\boldsymbol{\chi}^L_{\omega\mathbf{k}} + \boldsymbol{\chi}^T_{\omega\mathbf{k}}\right)\cdot\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} \tag{28}$$
   où
$$\boldsymbol{\chi}^L_{\omega\mathbf{k}} = -\frac{\omega_p^2\mathbf{k}\mathbf{k}}{\omega^2 - \gamma v_{th}^2 k^2} \tag{29}$$
   et
$$\boldsymbol{\chi}^T_{\omega\mathbf{k}} = -\frac{\omega_p^2(\mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k})}{\omega^2} \tag{30}$$

4. Comment est modifiée la relation de dispersion des oscillations plasma (c'est-à-dire de la partie longitudinale – parallèle à $\mathbf{k}$ – du champ $\tilde{\mathbf{E}}_{\omega\mathbf{k}}$) ? Pourquoi peut-on maintenant parler d'ondes plasma ?
   Si on ne considère que la partie longitudinale, on a la relation de dispersion
$$0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \gamma v_{th}^2 k^2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + \gamma v_{th}^2 k^2 \equiv \omega_p^2\left(1 + \gamma k^2\lambda_D^2\right). \tag{31}$$

On voit que ω dépend maintenant de k, l'énergie se propage à une vitesse

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\gamma v_{th}^2}{v_\varphi}, \tag{32}$$

($v_\varphi = \omega/k$ est la vitesse de phase). On peut donc parler d'ondes ; elles sont nommées *Ondes de Langmuir*. La valeur de γ adaptée pour ces ondes, qu'on peut rigoureusement dériver d'un calcul cinétique, est $\gamma = 3$.

5. Comment est modifiée la relation de dispersion des ondes électromagnétiques (transverses) dans le plasma ?
La partie transverse du tenseur diélectrique est identique à celle d'un plasma sans gradient de pression (plasma froid) : la relation de dispersion des ondes électromagnétiques est indépendente de la température du plasma – on n'a pas d'"écrantage de Debye" des ondes transverses.

6. Commentez sur la limite basse fréquence $\omega \to 0$ du tenseur diélectrique : en quoi est-elle reliée à la notion d'écrantage électrostatique ? La limite basse fréquence de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\omega \mathbf{k}}$ est

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{0\mathbf{k}}^L = 1 + \frac{\mathbf{kk}/k^2}{\gamma k^2 \lambda_D^2} \tag{33}$$

L'équation de Maxwell-Gauss en présence d'une charge ponctuelle $\rho_{ext} = q_t \delta(\mathbf{r})$ s'écrit

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \rho_{ext}, \tag{34}$$

donc on a les composants de Fourier (en utilisant $\mathbf{E} = i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}$, plus pratique ici),

$$\varphi_\mathbf{k} = \frac{q_t}{\varepsilon_0 \left(k^2 + \gamma \lambda_D^{-2}\right)} \tag{35}$$

et on connait bien évidemment ses tables de transformées de Fourier,

$$TF\left(\frac{e^{-r/\lambda}}{r}\right) = \frac{4\pi}{k^2 + \lambda^{-2}}, \tag{36}$$

d'où le potentiel dans l'espace réel

$$\varphi(r) = \frac{q_t}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/\sqrt{\gamma}\lambda_D} \tag{37}$$

qui est le potentiel de Yukawa qu'on avait dérivé en début de chapitre : on retrouve bien le phénomène d'écrantage électrostatique dans la limite quasi-statique. A noter que pour retrouver exactement ce potentiel, il faut prendre $\gamma = 1$ (fermeture isotherme) – ce qui est cohérent avec le calcul de la longueur de Debye, mais pas avec celle de l'oscillation plasma pour laquelle on doit prendre $\gamma = 3$. Cela illustre la difficulté de modéliser un plasma avec des modèles fluides : les relations de fermetures adaptées sont en général des fonctions de la fréquence des phénomènes à modéliser.

2 Chapitre 2 : Collisions

2.1 Freinage d'un ion rapide par une population d'électrons froids

On peut traiter le problème du freinage d'un ion rapide par une population d'électrons froids d'une manière presque identique à celle employée dans le chapitre 2 pour discuter de la diffusion angulaire des électrons. On considère un ion se déplaçant à une vitesse constante $\mathbf{v}_{ion}$ dans un référentiel où une population d'électrons froids est initialement au repos. Lors de son interaction avec un électron, l'électron va avoir acquis une petite vitesse δv non nulle – il y a donc un transfert d'énergie de l'ion vers l'électron, $\delta\epsilon = 1/2 m_e \delta v^2$.

1. Calculer l'énergie $\delta\epsilon$ transférée par l'ion lors d'une interaction (collision) avec un unique électron, lors d'une collision avec un paramètre d'impact b. On se placera dans l'approximation des petits angles.
   La variation de vitesse au premier ordre en $\theta = b_{90}/b$ vaut
   $$\delta\mathbf{v}_\perp = -\frac{b_{90}(v_{ion})}{b} v_{ion}\mathbf{u}_b = -\frac{2Zq_e^2}{bm_e v_{ion}}\mathbf{u}_b \tag{38}$$
   où $\mathbf{u}_b$ est le vecteur unitaire le long du vecteur "paramètre d'impact", pointant de l'ion vers l'électron. Le transfert d'énergie de l'ion vers l'électron vaut donc
   $$\delta\varepsilon = \frac{1}{2} m_e \delta\mathbf{v}_\perp^2 = \frac{2Z^2 q_e^4}{b^2 m_e v_{ion}^2} \tag{39}$$

2. Calculer la quantité d'énergie transférée par unité de temps de l'ion vers la population d'électron, en intégrant sur tous les électrons du plasma.
   Nous intégrons sur tous les électrons du plasma. Les électrons ayant un paramètre d'impact entre b et $b + db$ par rapport à l'ion et interagissant avec lui durant le temps Δt sont compris dans le volume $dV = 2\pi b db v \Delta t$. Nous vons donc
   $$\frac{\langle\Delta\varepsilon\rangle}{\Delta t} = nv\Delta t \int_0^\infty \delta\varepsilon(b) b db = -\frac{4\pi Z^2 q_e^4}{m_e v} \ln\Lambda. \tag{40}$$
   où l'intégrale divergente a été traitée comme dans le cours, en introduisant le logarithme de Coulomb.

3. Donner l'expression de la fréquence de freinage ν_{ie}, défini par $d\varepsilon/dt = -\nu_{ie}\varepsilon$. Comparer à la fréquence ν_{ei} de diffusion angulaire d'un électron évoluant dans un fond d'ions au repos obtenue dans le chapitre précédent.
   La frequence de freinage est ν_{ie} définie par
   $$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\nu_{ie}\varepsilon. \tag{41}$$
   Nous avons
   $$\nu_{ie} = \frac{8\pi Z^2 q_e^4}{m_e m_i v^3} \ln\Lambda \equiv 2\frac{m_e}{m_i}\nu_{ei} \ll \nu_{ei} \tag{42}$$
   Le temps de ralentissement de l'ion est donc plus long d'un facteur $\sim m_i/m_e$ que le temps de diffusion angulaire des électrons.

2.2 Champ électrique ambipolaire et limite de Dreicer

On considère un plasma confiné par gravitation. Nous avons vu qu'un champ électrique ambipolaire doit exister pour assurer la quasi-neutralité dans un tel plasma. Dans quelles conditions ce champ électrique serait-il plus important que le champ de Dreicer ? Que se passerait-il alors ?

Eléments de réponse : Le champ ambipolaire est $E_a = m_i g/2e$. Le rapport au champ de Dreicer vaut

$$\frac{E_a}{E_D} = \frac{m_i g}{2m_e \nu_{ei} v_{th}} = \frac{m_i g}{8\pi q_e^4 \ln\Lambda}\frac{kT}{n} \sim 8\times 10^6 \frac{g\ [\mathrm{m.s^{-2}}]\ T\ [\mathrm{eV}]}{n\ [\mathrm{m^{-3}}]} \tag{43}$$

où on a supposé $\ln\lambda \sim 25$ et on a pris $m_i = m_p$ (masse du proton).

Dans l'atmosphère solaire, disons dans la couronne, on a $T\ \sim 100$ eV, $n \sim 10^{14}$ m^{-3}, and $g \sim 275$ m.s^{-2}. Le rapport vaut donc $\sim 2\times 10^{-3} \ll 1$.

Recherchez un environnement dans lequel le rapport pourrait être de l'ordre de l'unité ? Autour d'une naine blanche, $g \sim 10^6$ m.s^{-2}. Autour d'une étoile à neutrons, $g \sim 10^{12}$ m.s^{-2}. Donc des champs ambipolaires très importants. Probablement de bons candidats. Quelle est la densité/température de l'atmosphère ces environnements ?

3 Chapitre 3 : Orbites de particules

3.1 Le terme $\mu\nabla$B

Dans le cours, on a admis que le terme de moyenne sur la période cyclotron

$$m = \langle \mathbf{v}_\ell \times \mathbf{r}_\ell \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{B}(\mathbf{R}_g)\rangle = -\frac{\mu}{q}\boldsymbol{\nabla}B. \tag{44}$$

Dans cet exercice, on se propose de le démontrer. Pour cela, on procède en plusieurs étapes

1. Montrez tout d'abord que

$$m = \omega_c\left((\langle \mathbf{r}_\ell\mathbf{r}_\ell\rangle : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{B})\mathbf{b} - \langle \mathbf{r}_\ell\mathbf{r}_\ell\rangle\cdot\boldsymbol{\nabla}B\right) \tag{45}$$

Aide : (i) quel lien l'expression de la trajectoire cyclotron permet de faire entre $\mathbf{r}_\ell$ et $\mathbf{v}_\ell$? (ii) exprimez les produits scalaires/tensoriels en notation d'Einstein aide à trouver les formes voulues. (iii) On supposera que la direction du vecteur $\mathbf{b}$ est constante sur "quelques périodes cyclotrons".

D'après l'équation du mouvement cyclotron, nous avons $\mathbf{v}_\ell = \omega_c(\mathbf{r}_\ell \times \mathbf{b})$. Nous avons donc

$$\langle \mathbf{v}_\ell \times (\mathbf{r}_\ell\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\rangle = \omega_c\langle(\mathbf{r}_\ell\times\mathbf{b})\times(\mathbf{r}_\ell\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\rangle. \tag{46}$$

En développant le double produit vectoriel, on obtient

$$\langle \mathbf{v}_\ell \times (\mathbf{r}_\ell \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\rangle = \omega_c \left(\langle \mathbf{r}_\ell \cdot ((\mathbf{r}_\ell \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B})\,\mathbf{b}\rangle - \langle \mathbf{b} \cdot ((\mathbf{r}_\ell \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B})\,\mathbf{r}_\ell\rangle\right). \tag{47}$$

Chacun de ces termes peut s'écrire (un passage par des notations d'Einstein est pratique...)

$$\langle \mathbf{r}_\ell \cdot ((\mathbf{r}_\ell \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B})\,\mathbf{b}\rangle \equiv \langle r_i r_k \partial_k B_i b_j\rangle = (\langle \mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell\rangle : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{B})\mathbf{b} \tag{48}$$

$$\langle \mathbf{b} \cdot ((\mathbf{r}_\ell \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B})\,\mathbf{r}_\ell\rangle \equiv \langle b_i r_k \partial_k B_i r_j\rangle = \langle \mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell\rangle \cdot \boldsymbol{\nabla} B \tag{49}$$

et on obtient bien la forme désirée. Pour obtenir la dernière égalité, on a utilisé $b_i \partial_k B_i = \partial_k B_i b_i = \nabla B$, et donc supposé que le vecteur $\mathbf{b}$ était constant - cf. hypothèse (iii) de l'énoncé.

2. Exprimez le tenseur $\mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell$ sous forme de matrice dans une base cartésienne d'axe $\mathbf{z} \equiv \mathbf{b}$. Moyennez sur la gyrophase pour montrer que

$$\langle \mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell\rangle = \frac{v_\perp^2}{2\omega_c^2}(\mathbf{I} - \mathbf{bb}) \tag{50}$$

Nous utilisons l'expression de la trajectoire cyclotron pour obtenir $\mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell$, dans une base d'axe $\mathbf{z} \equiv \mathbf{b}$,

$$\mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell = \begin{bmatrix} \rho_\ell^2 \cos^2\phi & \rho_\ell^2 \cos\phi \sin\,\phi & 0 \\ \rho_\ell^2 \sin\phi \cos\phi & \rho_\ell^2 \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où ϕ est la gyrophase. En moyennant sur cette dernière, on obtient le résultat recherché,

$$\langle \mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell\rangle = \frac{v_\perp^2}{2\omega_c^2}(\mathbf{I} - \mathbf{bb}) \tag{51}$$

3. En combinant les résultats des deux questions précédentes (ainsi qu'une équation de Maxwell judicieusement choisie), montrez que $m = -\frac{\mu}{q}\boldsymbol{\nabla} B$.

En utilisant le résultat de la question précédente, on calcule les deux termes obtenus dans la première question

$$(\langle \mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell\rangle : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{B})\mathbf{b} = \frac{v_\perp^2}{2\omega_c^2}\Big((\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\mathbf{b} - \boldsymbol{\nabla}_\parallel B\Big) \tag{52}$$

où $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0$ (eq. de Maxwell). Pour l'autre terme,

$$\langle \mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell\rangle \cdot \boldsymbol{\nabla} B = \frac{v_\perp^2}{2\omega_c^2}\Big(\boldsymbol{\nabla} B - \boldsymbol{\nabla}_\parallel B\Big) \tag{53}$$

En soustrayant ces deux expressions, on obtient le résultat

$$m = \langle \mathbf{v}_\ell \times (\mathbf{r}_\ell \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\rangle = -\frac{v_\perp^2}{2\omega_c}\boldsymbol{\nabla} B \tag{54}$$

3.2 Orbite de particule sur une ligne de champ potentiel.

Nous avons étudié dans le cours l'effet de la courbure des lignes de champ magnétique. Mais les équations de Maxwell n'autorisent pas l'existence d'une courbure des lignes de champ sans gradient du module du champ associé ; par conséquent, une dérive grad-B accompagne toujours une dérive de courbure. Nous cherchons dans cet exercice à calculer la dérive dans le cas d'un champ potentiel (i.e. pas de densité de courant ni de courant de déplacement dans le plasma : **rot B** $= 0$), caractérisé par un rayon de courbure R_c constant.

1. On considère une ligne de champ potentiel, de rayon de courbure R_c. Calculer le gradient perpendiculaire $\boldsymbol{\nabla} B$ du champ en un point de cette ligne de champ (pour cela, il peut être pratique de se placer dans un système de coordonnées polaires).

   Dans le système de coordonnées polaires centré sur le centre de courbure, la ligne de champ est parallèle à $\mathbf{u}_\theta$, et perpendiculaire à $\mathbf{u}_r$. On a

   $$\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{B} = 0 = (1/r)\partial_r(rB_\theta) \Rightarrow rB_\theta = const. \tag{55}$$

   d'où l'on obtient

   $$\boldsymbol{\nabla} B = -const.\frac{\mathbf{u}_r}{r^2} = -B\frac{\mathbf{n}}{R_c} \tag{56}$$

   où l'on a introduit le vecteur $\mathbf{n} \equiv \mathbf{u}_r$ unitaire normal extérieur à la courbure (comme dans les formules du cours...).

2. Déduisez l'expression de la dérive perpendiculaire d'une particule se déplaçant le long de cette ligne de champ, faisant apparaitre l'énergie cinétique totale de la particule $\mathscr{E}$ et son énergie parallèle $\mathscr{E}_\parallel$.
   En introduisant l'expression obtenue dans l'expression de la dérive grad-B, on obtient

   $$\mathbf{v}_\nabla = -\frac{mv_\perp^2}{2qR_c}\frac{-\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}}{B^2}. \tag{57}$$

   En ajoutant l'expression de la dérive de courbure, on obtient la dérive totale pour une ligne de champ potentiel

   $$\mathbf{v}_\nabla + \mathbf{v}_c = \frac{m(2v_\parallel^2 + v_\perp^2)}{2qR_c}\frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}}{B^2} \equiv \frac{\mathscr{E}_\parallel + \mathscr{E}}{qR_c}\frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}}{B^2} \tag{58}$$

   où on a fait apparaitre les énergies cinétiques totale et parallèle.