

Physique des plasmas

Arnaud Zaslavsky

19 septembre 2025

Master Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale

Table des matières

1	Phénomènes collectifs et échelles caractéristiques	3
1.1	Échelles caractéristiques : une première approche	4
1.2	Écrantage de Debye et électro-neutralité : la limite quasi-stationnaire . . .	6
1.2.1	Écrantage électrostatique	6
1.2.2	Le paramètre plasma, et la hiérarchie des échelles spatiales	8
1.2.3	Electro-neutralité	9
1.3	Réponse temporelle, plasma comme un milieu diélectrique	11
1.3.1	Rappel sur les milieux linéaires	11
1.3.2	Réponse inertielle : oscillation et résonance plasma	12
1.3.3	L'oscillation plasma : une vision heuristique	14
1.3.4	Oscillation transverse : l'onde électromagnétique dans un plasma .	15
1.4	Exercices	16
1.4.1	Capacité d'une sphère conductrice dans un plasma	16
1.4.2	Champ électrique de Pannekoek-Rosslund	17
1.4.3	Diffusion ambipolaire	17
1.4.4	Diélectrique d'un plasma chaud : oscillations et écrantage (*)	17
1.4.5	Régime basse-fréquence : l'onde acoustique ionique	18
1.4.6	Diélectrique d'un plasma collisionnel	18
2	Collisions coulombiennes	20
2.1	Sections efficaces	20
2.1.1	Collisions aux grands angles	20
2.1.2	Collisions aux petits angles : le logarithme de Coulomb	22
2.1.3	Force de frottement dynamique et effets associés	25
3	Orbites de particules chargées dans le champ électromagnétique	28
3.1	Particule dans un champ constant et homogène	28
3.1.1	Le mouvement cyclotron	28
3.1.2	Diamagnétisme du plasma	31
3.1.3	Champ électrique constant, dérive en champ croisés	32
3.1.4	Champ de force constant	33
3.2	Mouvement des particules dans un champ inhomogène	34
3.2.1	Mouvement du centre guide : équations générales	34

3.2.2	Force miroir et conservation du moment magnétique	35
3.2.3	Dérives perpendiculaires	37
3.3	Invariants adiabatiques	39
3.3.1	Premier invariant adiabatique : le moment magnétique	40
3.3.2	Deuxième invariant adiabatique : mouvement de rebond	40
3.3.3	Troisième invariante adiabatique : flux magnétique enfermé	40
3.4	Exercices	41
3.4.1	Le terme $\mu\nabla\mathbf{B}$	41
3.4.2	Orbite de particule sur une ligne de champ potentiel.	42
4	Transport dans un plasma magnétisé	43
4.1	Mobilité et diffusion	43
4.1.1	Cas limites : plasmas magnétisés et non-magnétisé	44
4.1.2	Coefficients Pedersen et Hall	45
4.1.3	Tenseur de conductivité	46
4.1.4	Ordre de grandeurs des mobilités et conductivités dans une atmo- sphère isotherme	47
4.2	Quelques effets du transport ionosphérique	49
4.2.1	Electrodynamique des basses latitudes : effet dynamo, système de courants Sq et électro-jet équatorial	49
4.2.2	Electrodynamique des hautes latitudes : couplages au vent solaire et à la magnétosphère	52
4.3	Bibliographie	56

Chapitre 1: Phénomènes collectifs et échelles caractéristiques

Les plasmas sont des gaz totalement ou partiellement ionisés. De tels états se retrouvent fréquemment dans les situations astrophysique, en raison de la présence d'étoiles, qui constituent des sources intenses de rayonnement ionisants : toute la matière située dans l'environnement d'une étoile (ainsi que l'étoile elle-même) se trouvent sous forme de plasma – à l'exception d'environnement particulièrement protégés, comme la surface de la Terre.

Les plasmas astrophysiques peuvent être caractérisés par une très vaste gamme de paramètres, comme illustré sur la figure 1.1 : on va de densités de l'ordre de 1 cm^{-3} dans la magnétosphère terrestre ou le milieu interstellaire, à 10^{25} cm^{-3} dans l'intérieur du soleil.

La dynamique des gaz neutres est contrôlée par des interactions à courte portée entre leurs constituants, c'est-à-dire par des collisions. La situation est différente en physique des plasmas, en raison de l'effet de la force de Lorentz, qui est à l'origine de corrélations macroscopiques à longue portée dans le plasma. Cet effet est intrinsèquement non linéaire, et implique des effets de rétroaction entre le champ et la matière ionisée.

La figure 1 illustre cette boucle de rétroaction : les distributions des particules dans l'espace de phase détermine les densités de charge et de courant, qui sont les sources du champ électromagnétique. Le champ électromagnétique, quant à lui, est à l'origine, par l'action de la force de Lorentz, du mouvement des particules, et donc de leur évolution dans l'espace des phases.

Bien que cette approche soit facile à comprendre sur le plan conceptuel, elle est généralement difficile à mettre en œuvre en raison du nombre extrêmement élevé de particules et de la non-linéarité des équations liant dynamique et champ.

Pour acquérir une compréhension pratique, il n'est donc pas raisonnable de tenter d'envisager le problème dans toute sa complexité. Nous étudierons plutôt les plasmas en considérant des phénomènes spécifiques. Pour chaque phénomène considéré, des approximations simplificatrices appropriées sont faites, ce qui conduit à un problème plus facile à traiter, isolant tel ou tel processus physique. Une situation dans laquelle un certain ensemble d'approximations est valable et fournit une description cohérente est appelée

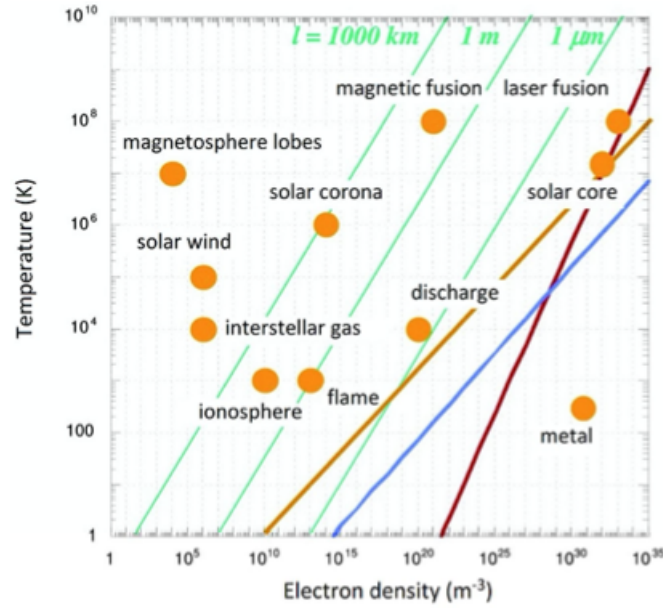


FIGURE 1.1 – Environnement ionisés dans le plan densité-température. Les lignes vertes indiquent des iso-contours de libre parcours moyen. Les trois autres lignes indiquent les plasmas pour lesquels la distance moyenne interparticulaire $d = n^{1/3}$ est égale à la longueur de Landau (bleu), la longueur de Debye (jaune) et la longueur de de Broglie (rouge).

un régime.

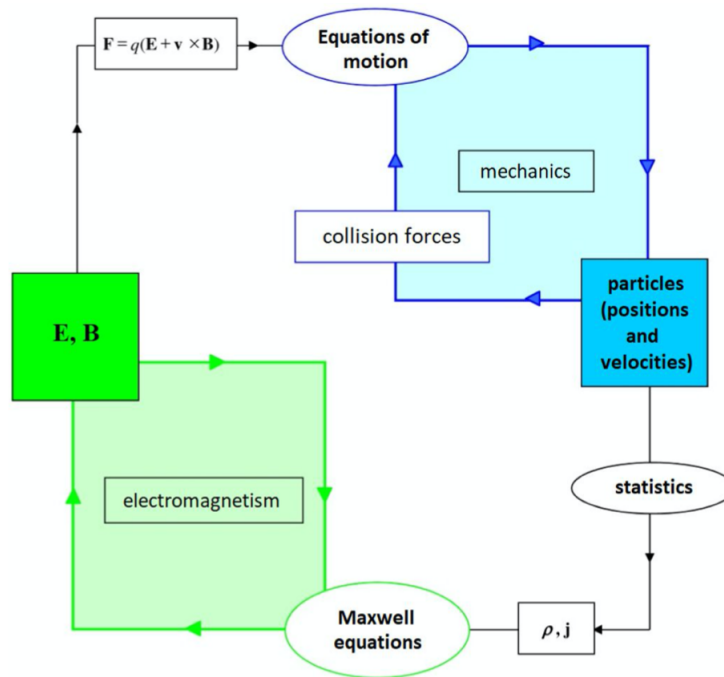
1.1 Échelles caractéristiques : une première approche

Dans un gaz neutre de particules ponctuelles de masse m , caractérisé par sa densité n et sa température T , on peut construire deux échelles indépendantes : la distance interparticulaire $\ell = n^{-1/3}$, et la vitesse thermique, ou vitesse du son, $v_{th} = c_s = \sqrt{kT/m}$.

Si on considère un gaz de particules chargées, on doit ajouter la charge typique d'une particule e et la constante ϵ_0 . Une analyse dimensionnelle¹ dans laquelle nous cherchons des grandeurs de la forme $(\epsilon_0/e^2)^\alpha (m)^\beta n^\gamma (kT)^\delta$ nous donne le système (pour une longueur) :

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + \delta = 0 \\ -3\alpha - 3\gamma + 2\delta = 1 \\ 2\alpha - 2\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \delta \\ \beta = 0 \\ \gamma = -(\alpha + 1)/3 \end{cases}$$

1. $[\epsilon_0/e^2] = M^{-1}L^{-3}T^2$, $[n] = L^{-3}$ and $[kT] = ML^2T^{-2}$



Nous avons 4 inconnues et 3 équations, on peut donc a priori construire une infinité de longueurs... Des cas particuliers intéressants sont

- $\alpha = 0$ donne $\ell = n^{-1/3}$: la distance interparticulaire.
- $\alpha = -1/2$ donne $\lambda_D = (\epsilon_0 kT / ne^2)^{1/2}$ la longueur de Debye, ou longueur d'écrantage électrostatique dans un plasma.
- $\alpha = -1$ donne $\lambda_L = e^2 / (\epsilon_0 kT)$, la longueur de Landau, qui est (à un facteur 4π près...) la distance séparant deux particules ayant des énergies thermiques égales à leur énergie d'interaction électrostatique de paire.

Notons que ces longueurs ne sont pas indépendantes, puisque

$$\lambda_D^2 \lambda_L \sim \ell^3 \quad (1.1)$$

On peut, à l'aide de la vitesse thermique, construire une fréquence caractéristique,

- $\omega_p = v_{th} / \lambda_D = (ne^2 / m\epsilon_0)^{1/2}$ est la fréquence plasma, qui est la fréquence typique d'oscillation d'une perturbation de densité dans un plasma.

Si on considère enfin un plasma magnétisé, caractérisé par son champ magnétique B et la constante μ_0 , d'autres échelles caractéristiques associées la dynamique de particules individuelles apparaissent :

- $\omega_c = eB/m$ est la fréquence de rotation d'une particule autour d'une ligne de champ magnétique.
- $\rho = v_{th}/\omega_c$ est le rayon de Larmor (rayon de rotation magnétique) thermique.

Mais aussi de nouvelles échelles "collectives" (impliquant la densité n) :

- $V_A = (B^2/nm\mu_0)^{1/2}$
- $\lambda = c/\omega_p \equiv 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\omega_p$ la longueur dite inertielle.

Il est donc à retenir qu'à l'inverse d'un gaz neutre, un plasma, en particulier magnétisé, est caractérisé par un très grand nombre d'échelles caractéristiques – et donc par une grande variété de régimes et de phénomènes physiques. Dans la suite, nous discuterons l'interprétation physique de (certaines de) ces échelles et la description de certains de ces phénomènes.

1.2 Écrantage de Debye et électro-neutralité : la limite quasi-stationnaire

En tant que milieu riche en électrons libres, un plasma est un bon conducteur électrique. Et nous savons qu'un conducteur à l'équilibre ne peut pas conserver une densité de charge non nulle dans son volume. On s'attend donc à ce qu'un plasma en état stationnaire ne contienne ni densité de charge, ni champ électrique macroscopique. Si l'on introduit un objet chargé dans un plasma, les électrons et les ions se distribueront dans l'espace de manière à annuler le champ électrique produit par cette charge. Nous voyons ici comment.

1.2.1 Écrantage électrostatique

Nous supposons que chaque espèce s du plasma est décrite par sa densité n_s , sa vitesse moyenne \mathbf{u}_s et sa pression $p_s = n_s k T_s$. La conservation de la densité de moment de la population s est décrite par l'équation

$$n_s m_s \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} = n_s q_s \mathbf{E} - \nabla p_s \quad (1.2)$$

où nous négligeons toute friction entre population de particules (nous reviendrons plus tard sur cette hypothèse).

Nous nous plaçons dans l'approximation quasi-statique, $d/dt \rightarrow 0$ (nous décrivons donc un phénomène *lent*, par rapport à un temps caractéristique que nous déterminerons plus tard). On peut remarquer que cela revient à négliger l'inertie des particules, $m_s \rightarrow 0$. Nous supposons aussi que les variations du champ sont *lentes*, ainsi le champ électrique est purement potentiel, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. L'équation précédente se réduit à

$$0 = -n_s q_s \nabla\varphi - \nabla p_s. \quad (1.3)$$

On suppose les populations isothermes : $T_s = const.$, et donc

$$n_s = n_{0,s} \exp\left(-\frac{q_s \varphi}{kT_s}\right). \quad (1.4)$$

Dans l'approximation quasi-statique, les distributions spatiales sont donc données par la loi de Boltzmann.

Etudions à présent l'effet d'une particule test, ponctuelle, de charge q_t , insérée dans un plasma autrement globalement neutre et spatialement homogène. Le potentiel électrique dans le plasma est décrit par l'équation de Poisson

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{pol}(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} - \frac{q_t \delta(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (1.5)$$

où nous supposons que la charge test est placée à l'origine du repère. La densité de charge ρ_{pol} décrit la polarisation des charges du plasma dans le champ électrique créé par la charge test. Celle-ci vaut

$$\rho_{pol}(\mathbf{r}) = \sum_s q_s n_s(\mathbf{r}) = \sum_s q_s n_{0,s} \exp\left(-\frac{q_s \varphi}{kT_s}\right) \quad (1.6)$$

On suppose la perturbation produite par la particule test de faible amplitude, et l'énergie potentielle $q_s \varphi$ des particules sera donc par rapport à leur énergie thermique – sauf peut-être à proximité immédiate de l'origine. On peut donc développer

$$n_s(\mathbf{r}) = n_{0,s} \left(1 - \frac{q_s \varphi}{kT_s} + \frac{1}{2} \left(\frac{q_s \varphi}{kT_s}\right)^2 + \dots\right), \quad (1.7)$$

d'où on obtient au premier ordre

$$\rho_{pol}(\mathbf{r}) \simeq -\sum_s \frac{n_{0,s} q_s^2 \varphi}{kT_s}, \quad (1.8)$$

où l'on a fait l'hypothèse que le plasma dans sa globalité (charge test mise à part) était neutre, $\sum_s n_{0,s} q_s = 0$.

L'équation de Poisson (1.5) s'écrit maintenant sous forme linéarisée

$$\Delta\varphi - \frac{\varphi}{\lambda_D^2} = -\frac{q_t \delta(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (1.9)$$

où l'on a introduit la longueur caractéristique, dite longueur de Debye,

$$\lambda_D^{-2} = \sum_s \frac{q_s^2 n_{0,s}}{\varepsilon_0 kT_s} \equiv \sum_s \lambda_{D,s}^{-2} \quad (1.10)$$

La solution de l'éq.(1.9) (dite equation de Yukawa), est

$$\varphi(r) = \frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-r/\lambda_D) \quad (1.11)$$

On voit que le potentiel proche de la charge test est son potentiel dans le vide, puis que le potentiel décroît exponentiellement (c'est l'effet d'écrantage) à partir de distances de l'ordre de la longueur de Debye.

Numériquement, on a, pour la longueur de Debye électronique (ou toute espèce portant une charge $e\dots$),

$$\lambda_{De} [\text{m}] \simeq 7,4 \left(\frac{T_e [\text{eV}]}{n_e [\text{cm}^{-3}]} \right)^{1/2} \quad (1.12)$$

Nous avons fait plusieurs hypothèses pour obtenir ce résultat : que le plasma était non-collisionnel (pas de terme de friction), que la perturbation de potentiel due à la charge test était faible devant l'énergie thermique des particules du plasma, et que la perturbation était *lente*. Concernant cette dernière hypothèse, on peut maintenant estimer, en ordre de grandeur, le terme inertiel à la gauche de l'éq.(1.2) : si on considère une perturbation agissant sur une fréquence typique ω , le terme inertiel sera négligeable si

$$m\omega u \ll kT/\lambda_D \iff \omega \ll v_{th}^2/u\lambda_D \quad (1.13)$$

Si on suppose une population subsonique ($u \ll v_{th}$), une condition suffisante pour la validité de l'hypothèse quasi-statique est donc $\omega \ll \omega_p$, où la *fréquence plasma* est définie comme

$$\omega_p = v_{th}/\lambda_D = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}. \quad (1.14)$$

Cette fréquence décrit la rapidité de la réponse inertielle du plasma à une perturbation. Toute perturbation très lente devant $\omega_{p,s}$ sera écrantée par l'espèce s .

Nous nous intéressons dans la suite à la validité des deux autres hypothèses.

1.2.2 Le paramètre plasma, et la hiérarchie des échelles spatiales

Nous avons supposé que la perturbation de potentiel due à la charge test était faible devant l'énergie thermique des particules du plasma. Nous disposons maintenant d'une expression pour le potentiel φ dans le plasma. La distance inter-particulaire dans le plasma est $\ell = n^{-1/3}$. Nous avons

$$\frac{e\varphi(\ell)}{kT} \simeq \frac{\Gamma^{2/3}}{4\pi} \exp(-\Gamma^{1/3}) \quad (1.15)$$

où nous avons introduit le *paramètre plasma*

$$\Gamma = \frac{1}{n\lambda_D^3}, \quad (1.16)$$

qui est donc l'inverse du nombre moyen de particules dans un "cube de Debye". L'hypothèse de faible valeur du potentiel face à l'énergie thermique est valable si $\Gamma \ll 1$, ce qui correspond à dire qu'un volume d'extension typique λ_D^3 doit contenir un grand nombre de particules.

Cette condition est nécessaire à ce qu'un ensemble de particules chargées manifeste des propriétés d'écrantage, et donc se comporte comme un plasma. Un plasma vérifie donc toujours, par définition $\Gamma \ll 1$. Si cette condition n'est pas respectée, on parlera de "gaz coulombien", plutôt que de plasma. Cette condition est toujours très bien respectée dans les milieux ionisés astrophysiques, par exemple on a dans le vent solaire à 1 UA, $\lambda_D \simeq 10$ m et $n \simeq 5$ cm⁻³, d'où $\Gamma \simeq 2 \times 10^{-10}$.

La petitesse de Γ rend possible d'ordonner les échelles de distance du plasma introduites précédemment ℓ , λ_L et λ_D . Nous avons $\ell/\lambda_D = \Gamma^{1/3} \ll 1$, and $\ell/\lambda_L = (\lambda_D/\ell)^2 = \Gamma^{-2/3} \gg 1$. Les échelles spatiales du plasma sont donc ordonnées comme suit :

$$\lambda_L \ll \ell \ll \lambda_D, \quad (1.17)$$

avec des rapports contrôlés par la valeur du paramètre plasma Γ .

1.2.3 Electro-neutralité

Fluctuation thermique

Un plasma, dans l'approximation quasi-statique, est macroscopiquement *quasi-neutre* à des échelles plus grandes que la longueur de Debye. On le comprend intuitivement par le calcul du paragraphe 1.2.1, puisque la densité de charge ρ décroît exponentiellement du voisinage d'une charge test sur une longueur λ_D . On peut aussi illustrer cela en calculant l'échelle maximale d'une fluctuation thermique de densité de charge dans un plasma.

On considère un plasma initialement neutre, de densité n , de température T , composé d'ions de charge e et d'électrons. Nous cherchons à calculer le plus grand rayon r_{max} d'une sphère qui pourrait spontanément se vider d'électrons en raison des fluctuations thermiques. Supposons que le mouvement thermique des électrons est purement radial – ainsi le problème est à symétrie sphérique².

Le champ électrique dans la sphère vide d'électrons est purement radial, et donné par le théorème de Gauss,

$$E_r(r) = \frac{\rho_i r}{3\epsilon_0} = \frac{enr}{3\epsilon_0} \quad (1.18)$$

On en déduit l'énergie électrostatique associée à la fluctuation de densité électronique,

$$W_E = \iiint \frac{\epsilon_0 E_r^2}{2} dV = \int_0^{r_{max}} \frac{e^2 n^2 r^2}{18\epsilon_0} 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi n^2 e^2}{45\epsilon_0} r_{max}^5 \quad (1.19)$$

2. Cette situation est bien sûr extrêmement artificielle (en réalité, les électrons se déplaceraient dans des directions aléatoires et il faudrait considérer la distribution des vitesses radiales), mais c'est un "pire cas", qui permet de donner une borne supérieure à la taille de la sphère vide d'électrons.

Cette énergie est fournie par le mouvement thermique des électrons, on a donc $W_E = W_{th}$, où l'énergie thermique des électrons initialement contenus dans la sphère est

$$W_{th} = \iiint \frac{3}{2}nkTdV = 2nkT\pi r_{max}^3 \quad (1.20)$$

On en déduit la taille de notre fluctuation sphérique

$$r_{max}^2 = 45 \frac{\varepsilon_0 k T}{n e^2} = 45 \lambda_{De}^2 \quad (1.21)$$

Ce calcul, évidemment grossier, montre que le plus grand volume pouvant spontanément se charger sous l'effet de fluctuations thermiques a un rayon de quelques longueurs de Debye – dans la situation hautement improbable où tous les électrons se déplaceraient initialement dans la direction radiale vers l'extérieur. Nous pouvons que le plasma est quasi neutre sur des longueurs d'échelle beaucoup plus grandes que la longueur de Debye.

Approximation plasma, et champ électrique ambipolaire

Lorsque les conditions de l'approximation quasi-statique sont vérifiées, et que l'on considère des variations à des échelles grandes devant λ_D , on peut donc affirmer qu'à une bonne approximation près le plasma est neutre :

$$\sum_s q_s n_s(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.22)$$

Cette relation constitue ce qui est couramment appelé dans la littérature *l'approximation plasma*. C'est une approximation particulièrement pratique en ce qu'elle permet de calculer le champ électrique (potentiel) dans le plasma en se passant des équations de Maxwell. D'une certaine manière elle remplace l'équation de Maxwell-Gauss.

A noter que cette quasi-neutralité macroscopique n'implique pas que le champ électrique est nul dans le plasma : au contraire, un champ électrique doit en général exister afin de maintenir l'électro-neutralité à l'encontre d'autres effets (en particulier inertiels) qui auraient tendance à induire des séparations de charges. Un tel champ est appelé *champ électrique ambipolaire*.

Afin d'illustrer cet effet, supposons un plasma en état stationnaire dans un champ d'accélération $\mathbf{g}(\mathbf{r})$. Si l'on suppose naïvement que le champ électrique est nul dans le plasma, on arrive vite à une contradiction : la différence de masse entre ions et électrons induit une différence de densité de ces populations, donc une charge d'espace doit exister, et donc un champ électrique... L'équation décrivant l'équilibre doit donc prendre en compte un champ électrique :

$$0 = -kT\nabla n + n_s q_s \mathbf{E}(\mathbf{r}) + n_s m_s \mathbf{g}(\mathbf{r}) \quad (1.23)$$

On pourrait résoudre deux équations, pour les ions et les électrons, couplées à l'équation de Maxwell-Gauss (ou Poisson), pour obtenir le champ électrique : ce serait assez lourd.

On peut à la place supposer faire l'approximation plasma $n_e = n_i \equiv n_{plasma}$. La soustraction des équations pour ces deux populations nous donne alors le champ électrique ambipolaire

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \simeq -\frac{m_i \mathbf{g}(\mathbf{r})}{2e}. \quad (1.24)$$

et leur addition nous donne le profil de densité

$$n_{plasma} \simeq n_0 \exp\left(-\frac{m_i \varphi_g(\mathbf{r})}{2kT}\right), \quad \text{où } \mathbf{g} = -\nabla \varphi_g \quad (1.25)$$

Le champ ambipolaire a donc pour effet de diviser la masse des ions par 2, et de conférer aux électrons une masse effective $m_i/2$, afin de maintenir l'électro-neutralité. L'échelle de hauteur d'une atmosphère de plasma est donc doublée par rapport à celle d'un gaz neutre.

1.3 Réponse temporelle, plasma comme un milieu diélectrique

1.3.1 Rappel sur les milieux linéaires

Après avoir étudié le plasma dans l'approximation statique, nous cherchons maintenant à étudier sa réponse à une perturbation temporelle. Il est pratique d'étudier celle-ci, pour de petites perturbations, en introduisant la réponse diélectrique $\epsilon(\omega)$ du plasma.

Nous rappelons l'équation de Maxwell-Gauss dans un milieu,

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{ext}, \quad \text{où } \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.26)$$

et \mathbf{P} est la densité volumique de dipôles dans le milieu. La densité volumique de charge internes (charges de polarisation) au milieu est (d'après Maxwell-Gauss) reliée à \mathbf{P} par

$$\rho_{int} = -\text{div } \mathbf{P} \quad (1.27)$$

La conservation de la charge dans le milieu s'écrit

$$\frac{\partial \rho_{int}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}_{int} = 0 \iff \text{div } (-\partial_t \mathbf{P} + \mathbf{j}_{int}) = 0. \quad (1.28)$$

La densité de courant dans le milieu est donc reliée à \mathbf{P} par

$$\mathbf{j}_{int} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (1.29)$$

Le milieu est linéaire si il existe un tenseur χ , dit *susceptibilité électrique*, telle que

$$P_i(t) = \epsilon_0 \int \chi_{ij}(t-t') E_j(t') dt'. \quad (1.30)$$

Il est en général beaucoup plus simple de se placer dans l'espace de Fourier,

$$\mathbf{P}_\omega = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}_\omega \cdot \mathbf{E}_\omega \quad (1.31)$$

Dans un tel milieu linéaire, le vecteur d'induction électrique est lié au champ électrique par

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon_0 (\mathbf{I} + \boldsymbol{\chi}_\omega) \cdot \mathbf{E}_\omega \quad (1.32)$$

et on définit le tenseur diélectrique du milieu par

$$\mathbf{D}_\omega = \boldsymbol{\varepsilon}_\omega \cdot \mathbf{E}_\omega \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\omega \equiv \varepsilon_0 (\mathbf{I} + \boldsymbol{\chi}_\omega) \quad (1.33)$$

En l'absence de champ extérieur, ou de densité charge extérieure au milieu continu, l'équation de Maxwell-Gauss se réduit à (la partie droite des équations fait l'hypothèse électrostatique, c'est-à-dire que $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$)

$$\text{div} \mathbf{D}_\omega = 0 \xrightarrow{\text{E.S.}} \boldsymbol{\varepsilon}_\omega \cdot \mathbf{E}_\omega = 0 \quad (1.34)$$

En présence d'un champ extérieur oscillant $\mathbf{E}_{ext,\omega}$, celle-ci donne

$$\text{div} \mathbf{D}_\omega = \text{div} \mathbf{E}_{ext,\omega} \xrightarrow{\text{E.S.}} \boldsymbol{\varepsilon}_\omega \cdot \mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_{ext,\omega} \quad (1.35)$$

Ces dernières relations sont pratiques pour évaluer la réponse d'un milieu à un champ électrique longitudinal, comme nous le verrons dans la section suivante.

1.3.2 Réponse inertielle : oscillation et résonance plasma

En présence d'un champ électrique variable dans le temps, le plasma se polarise, puisque les électrons et les ions vont répondre de manière différentes à ce champ. La réponse dynamique de l'espèce s au champ électrique dans le plasma $\tilde{\mathbf{E}}$ est donnée (en négligeant dans un premier temps tout effet thermique) par

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{r}}_s}{dt^2} = \frac{q_s}{m_s} \tilde{\mathbf{E}}(t), \quad \text{soit } \tilde{\mathbf{r}}_{s,\omega} = -\frac{q_s}{m_s \omega^2} \tilde{\mathbf{E}}_\omega \quad (1.36)$$

Chaque charge crée un petit dipôle oscillant $\tilde{\mathbf{p}}_s = q_s \tilde{\mathbf{r}}_s$. La densité de ces dipôles est donnée par

$$\tilde{\mathbf{P}}_\omega = \sum_s n_s \tilde{\mathbf{p}}_s \simeq \sum_s n_{0,s} \tilde{\mathbf{p}}_s = -\sum_s \frac{n_{0,s} q_s^2}{m_s \omega^2} \tilde{\mathbf{E}}_\omega, \quad (1.37)$$

qu'on réécrit sous la forme

$$\tilde{\mathbf{P}}_\omega = -\varepsilon_0 \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} \tilde{\mathbf{E}}_\omega, \quad \text{où } \omega_{p,s}^2 = \frac{n_{0,s} q_s^2}{m_s \varepsilon_0} \quad (1.38)$$

où l'on a introduit la fréquence plasma ω_p . On a donc dérivé la susceptibilité du plasma,

$$\chi_\omega = - \sum_s \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega^2} \simeq - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega^2} \quad (1.39)$$

puisque la masse électronique est très faible devant la masse ionique.

En l'absence de champ extérieur, et dans l'hypothèse électrostatique, le champ dans le plasma vérifie la relation (1.34). Le tenseur ε_ω est ici diagonal (scalaire), ce qui simplifie la relation ; on a

$$\varepsilon_\omega \mathbf{E}_\omega = 0. \quad (1.40)$$

Cette relation peut-être vérifiée de deux manières : de manière triviale, le champ peut être nul, $\mathbf{E}_\omega = 0$ dans la plasma. Mais cette relation nous informe aussi sur un phénomène non-trivial : un champ longitudinal non-nul peut-exister dans le plasma, à condition que

$$\varepsilon_\omega = 0 \iff \omega^2 = \omega_p^2 \quad (1.41)$$

Ce phénomène correspond à ce qu'on appelle *l'oscillation plasma*. On peut saisir la nature de cette oscillation en écrivant la forme spatio-temporelle du champ

$$(\omega^2 - \omega_p^2) \mathbf{E}_\omega = 0 \iff \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \iff \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_p t)} \quad (1.42)$$

où l'on a exprimé la composante spatiale du champ sous la forme d'une somme de modes $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. Cette forme fait apparaître cette oscillation sous la forme d'une somme d'ondes planes progressives découplées les unes des autres, de vitesse de groupe nulle (puisque'il n'y a pas de relation entre ω et \mathbf{k}) ; c'est pourquoi on ne parle pas dans ce cas d'onde plasma, mais plutôt d'oscillation plasma. Celle-ci est accompagnée d'une oscillation de densité de charge,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \sum_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_p t)}, \quad (1.43)$$

dont on voit qu'elle est en quadrature de phase avec l'oscillation de champ électrique.

Considérons enfin la réponse du plasma à l'application d'un champ électrique extérieur $E(t) = E_0 e^{j\omega t}$. Le champ total dans le plasma est relié au champ appliqué par l'eq.(1.35). On a

$$\varepsilon_\omega \cdot \mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_{ext,\omega}, \quad (1.44)$$

qui nous informe sur la réponse du plasma le long du champ extérieur appliqué. On a, pour celle-ci,

$$E_\omega = \frac{\omega^2 E_0}{\omega^2 - \omega_p^2}. \quad (1.45)$$

Cette relation illustre plusieurs phénomènes important :

- Dans la limite des hautes fréquences $\omega \gg \omega_p$, le champ dans le plasma est égal au champ extérieur : le plasma se comporte comme le vide.
- Dans la limite basse fréquence $\omega \ll \omega_p$, le champ dans le plasma est nul : le plasma écranterait totalement le champ extérieur
- Le champ dans le plasma diverge à la fréquence plasma : celle-ci joue un rôle de fréquence de résonance du milieu. La divergence est en réalité contrôlée par des effets ici non pris en compte (collisions, ou autres effets cinétiques).

1.3.3 L'oscillation plasma : une vision heuristique

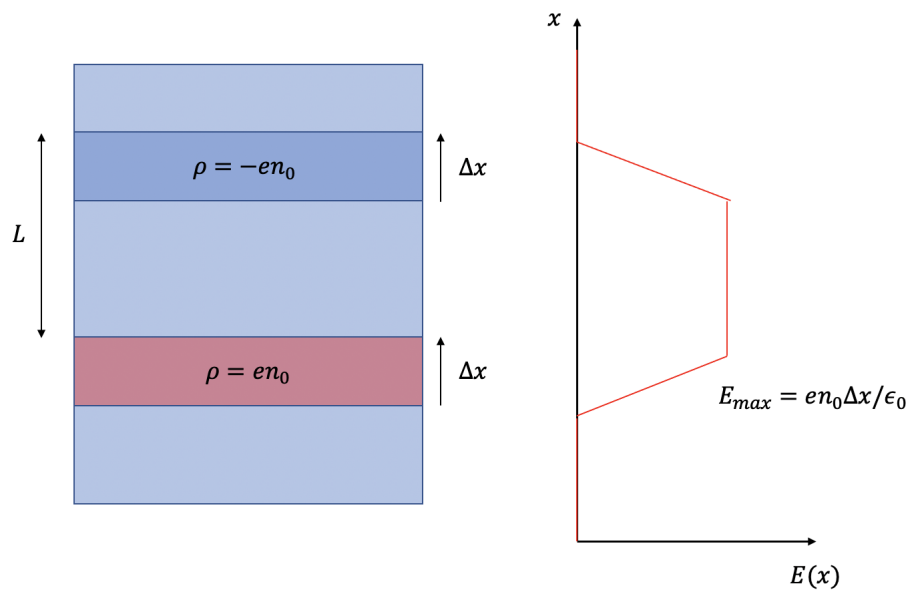


FIGURE 1.2 – Traitement imagé de l'oscillation plasma.

Nous présentons ici une vision plus imagée de l'oscillation plasma. Considérons un plasma quasi neutre d'électrons et d'ions, ayant chacun une densité n_0 et une charge $\pm e$. Nous déplaçons une couche d'électrons de largeur L d'un petit déplacement $\Delta x \ll L$, créant ainsi deux régions de densité de charge non nulle (cf. fig.1.2). Le système est supposé invariant par translation selon les deux directions perpendiculaires à l'axe x , de sorte que toutes les quantités ne dépendent que de la coordonnée x . Nous recherchons l'évolution temporelle de cette configuration initiale et supposons que nous pouvons considérer les ions comme immobiles (nous vérifierons à la fin que c'est bien le cas).

Le champ électrique dans le plasma est donné par l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{e(n_0 - n_e(x))}{\epsilon_0} \Rightarrow E(x) \sim en_0\Delta x/\epsilon_0 \quad (1.46)$$

dans la majeure partie de la région comprise entre 0 et L, puisque nous supposons que Δx est une quantité très faible par rapport à L. En dehors de la région $0 < x < L$, le champ électrique est nul. À l'intérieur de cette région, la dynamique des électrons est donnée par

$$\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = -\frac{eE}{m} = -\frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} \Delta x. \quad (1.47)$$

Les électrons oscillent donc à la fréquence plasma $\omega_p = (n_0 e^2 / m \epsilon_0)^{1/2}$. Le champ électrique dans le plasma vaut

$$E(0 < x < L, t) \simeq \frac{en_0 \Delta x_0}{\epsilon_0} \cos \omega_p t \quad (1.48)$$

Sous l'action de ce champ électrique, l'amplitude de l'oscillation des ions est donnée par

$$\Delta x_{ions} \sim \frac{e^2 n_0}{m_i \epsilon_0 \omega_p^2} \Delta x_0 = \frac{\omega_{p,ions}^2}{\omega_p^2} \Delta x_0 = \frac{m_e}{m_i} \Delta x_0 \quad (1.49)$$

qui est plus petite que l'amplitude du mouvement des électrons par un facteur au moins ~ 2000 . Ceci justifie l'hypothèse des ions immobiles.

1.3.4 Oscillation transverse : l'onde électromagnétique dans un plasma

On a traité le cas de l'oscillation électrostatique ($\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$) dans la section précédente. Etudions maintenant le cas de l'oscillation transverse ($\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$). On considère la transformée spatio-temporelle des équations de Maxwell, nous avons

$$i\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} = i\omega \mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}} \quad \text{Maxwell-Faraday} \quad (1.50)$$

et

$$i\mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}} = \mu_0 (\mathbf{j}_{\omega\mathbf{k}} - i\omega \epsilon_0 \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}) \quad \text{Maxwell-Ampère} \quad (1.51)$$

Le courant est lié au vecteur polarisation du plasma par la relation (1.29), donc Maxwell-Ampère se ré-écrit

$$i\mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}} = -i\omega \mu_0 (\mathbf{P}_{\omega\mathbf{k}} + \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}) = -i \frac{\omega}{c^2} \boldsymbol{\epsilon}_{r,\omega\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} \quad (1.52)$$

où on a utilisé $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ et introduit la permittivité relative $\boldsymbol{\epsilon}_r = \boldsymbol{\epsilon}_r / \epsilon_0$. En ré-injectant dans l'équation de Faraday, on obtient

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}) = -k^2 \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\epsilon}_{r,\omega\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} \quad (1.53)$$

où l'on a utilisé $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Ceci est l'équation générale de propagation d'une onde transverse dans un milieu diélectrique. Pour obtenir les propriétés de l'onde dans un

plasma, il nous suffit d'utiliser l'expression "inertielle" de $\varepsilon_{\omega\mathbf{k}}$ dérivée dans le paragraphe 1.3.2,

$$\left(\omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2\right) \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} = 0. \quad (1.54)$$

La relation de dispersion de l'onde électromagnétique dans un plasma est ainsi

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2, \quad (1.55)$$

montrant que les ondes transverses dont les fréquences sont inférieures à la fréquence plasma sont évanescentes (k imaginaire). Elle montre également que la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$ des ondes électromagnétiques dans un plasma est supérieure à la vitesse de la lumière³. Cela produit un effet notable : lorsque un rayon électromagnétique pénètre dans une interface plasma, il est réfracté vers l'extérieur à la normale de la surface (contrairement au comportement intuitif des systèmes optiques classiques, présentant un indice optique supérieur à 1). L'indice de réfraction optique du plasma vaut

$$n = \frac{kc}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1. \quad (1.56)$$

1.4 Exercices

1.4.1 Capacité d'une sphère conductrice dans un plasma

Nous considérons une sphère de rayon a , dans un plasma constitué d'ions de charge $+e$ et de densité n_i et d'électrons de densité n_e . Le problème présente une symétrie sphérique par rapport au centre de la sphère, les densités ne dépendent donc que de la distance r à ce centre.

Nous voulons calculer la capacité de la sphère. Pour cela, nous supposons un dispositif qui la maintient à un potentiel V par rapport à « l'infini » - le potentiel lointain étant celui du plasma non perturbé, que nous supposons égal à 0.

1. Calculez le potentiel $\varphi(r)$ autour de la sphère, en supposant un régime quasi-statique pour les ions et les électrons. (Astuce : vous pouvez introduire $\psi(r) = r\varphi(r)$ pour simplifier l'équation de Poisson en coordonnées sphériques, et résoudre pour ψ).
2. Calculez la charge portée par la sphère, en supposant la neutralité globale du système sphère + plasma.
3. Déduisez en la capacité de la sphère conductrice. En quoi est-elle différente de la capacité d'une sphère dans le vide ?
4. Discutez de la validité de l'approximation quasi-statique.

3. Bien sûr, on peut vérifier que la vitesse de groupe v_g est toujours inférieure à c . Vous pouvez démontrer comme exercice que $v_\varphi v_g = c^2$

1.4.2 Champ électrique de Pannekoek-Rossland

On considère une sphère de plasma en auto-gravitation (une étoile...), de masse M et de rayon R . On suppose la symétrie sphérique et le problème stationnaire.

1. Reliez le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en tout point de l'étoile à l'accélération de la pesanteur $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ à ce même point.
2. En déduire le lien entre la charge totale Q de l'étoile et sa masse M .
3. Donnez l'expression du champ électrique (dit *de Pannekoek-Rossland*) à l'extérieur de l'étoile.

1.4.3 Diffusion ambipolaire

Nous considérons le mouvement diffusif d'un nuage de plasma dans un gaz neutre infini, homogène, de densité n_n . Nous considérons que les collisions entre les particules de plasma et le gaz neutre produisent une force de frottement $\mathbf{f}_\alpha = \nu_\alpha \mathbf{u}_\alpha$. Avec $\nu_\alpha \equiv v_{th,\alpha}/\lambda$ la fréquence de collision entre les neutres et l'espèce α ($\alpha = i, e$, pour les ions et électrons, resp., et λ est une constante (le libre parcours moyen), qu'on supposera identique pour toutes les espèces). Nous supposons que la friction domine la convection, de sorte que le mouvement de la population α est décrit par l'équation

$$0 = -kT\nabla n_\alpha + n_\alpha q_\alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}) - n_\alpha \nu_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \quad (1.57)$$

1. Exprimez la vitesse moyenne \mathbf{u}_α de chaque population.
2. On suppose le champ électrique nul. Exprimez dans ce cas le coefficient de diffusion de chaque population D_α , en faisant apparaître explicitement la masse m_α .
3. Quel problème identifiez-vous? Quelle(s) condition(s) doit-on imposer afin de résoudre ce problème?
4. Quel est le coefficient de diffusion (dit *ambipolaire*) réel du plasma dans le gaz neutre?

1.4.4 Diélectrique d'un plasma chaud : oscillations et écrantage (*)

Nous avons dans le paragraphe 1.3.2 calculé la valeur de la fonction diélectrique ε_ω du plasma dans un cas très simplifié, en négligeant tout effet thermique en particulier. Ici, on cherche à calculer le diélectrique dans le cas où les électrons ont une pression non-nulle, mais en conservant l'hypothèse simplificatrice d'ions immobiles, et d'un problème purement électrostatique. La population d'électron est caractérisée par sa densité n_e , sa vitesse moyenne \mathbf{u}_e et sa pression p_e . La population ionique par sa densité n_i , et sa charge $q_i = +e$.

1. Exprimez les équations du fluide électronique (conservation du nombre de particules, et conservation du moment), ainsi que l'équation reliant le champ électrique à la densité d'électrons n_e et d'ions n_i .
2. Linéarisez ces équations en supposant que $n_e = n_0 + \tilde{n}_e(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}_e = \tilde{\mathbf{u}}_e(\mathbf{r}, t)$, $T_e = T = \text{const.}$, $n_i = n_0$ et $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$. Les grandeurs notées avec des tildes étant de "petites perturbations".
3. Calculez la susceptibilité du plasma dans ce cas, $\chi_{\omega\mathbf{k}}$ (on "algébriser" les équations en se plaçant dans l'espace de Fourier).
4. Comment est modifiée la relation de dispersion des oscillations plasma ? Pourquoi peut-on maintenant parler d'ondes plasma ?
5. Comment est modifiée la relation de dispersion des ondes électromagnétiques (transverses) dans le plasma ?
6. Commentez sur la limite basse fréquence $\omega \rightarrow 0$ du tenseur diélectrique : en quoi est-elle reliée à la notion d'écrantage électrostatique ?

1.4.5 Régime basse-fréquence : l'onde acoustique ionique

Soit une perturbation électrique de vecteur d'onde k et de fréquence ω . Puisque la vitesse thermique des ions est en général très petite devant celle des électrons, il existe une gamme de fréquence telle que

$$kv_{th,i} \ll \omega \ll kv_{th,e}. \quad (1.58)$$

Nous étudions ce régime dans cet exercice.

1. Comment caractériser la réponse des ions, et des électrons, dans un tel régime.
2. En utilisant les résultats de l'exercice précédent, exprimez le tenseur diélectrique en considérant le mouvement des deux populations (ions et électrons – contrairement à l'exercice précédent où les ions étaient considérés immobiles). On se limitera au cas de fluctuations longitudinales.
3. Simplifiez la relation de dispersion obtenue dans le régime de fréquence considéré.
4. On suppose maintenant $k\lambda_D \ll 1$: pourquoi peut-t-on parler d'ondes acoustiques ioniques ? Quelle est la vitesse de propagation de ces ondes ? Commentez par rapport au cas d'ondes acoustiques dans un gaz neutre.

1.4.6 Diélectrique d'un plasma collisionnel

On considère un plasma dans lequel la population électronique est "collisionnelle", caractérisée par une fréquence de collision ν – la dynamique des électrons est alors donnée par

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{e}{m_e}\mathbf{E} - \nu\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.59)$$

1. Calculez la fonction diélectrique ϵ_ω du plasma. Comment répond le plasma à un champ extérieur imposé $E_0 \sin(\omega t)$?

2. Comment est modifiée la relation de dispersion des oscillations plasma ?
3. Comment est modifiée la relation de dispersion des ondes électromagnétiques (transverses) dans le plasma ?

Chapitre 2: Collisions coulombiennes

Nous avons étudié dans le chapitre précédent les phénomènes collectifs, à travers lesquels le champ et un grand nombre de particules s'organisent de manière cohérente ($\Gamma \ll 1$ implique des échelles de corrélations grandes devant la distance interparticulaire). Nous étudions dans ce chapitre l'aspect "opposé" des interactions entre particules deux à deux, c'est-à-dire des collisions.

Dans les plasmas totalement ionisés, ces collisions sont contrôlées par la force coulombienne à longue portée (à l'opposé des interactions dipôle-dipôle à courte portée qui contrôlent les collisions entre atomes ou molécules). Ces collisions jouent un rôle important dans la compréhension des phénomènes de transport (conduction électrique et thermique, diffusion...) dans les plasmas. Nous verrons aussi que leur relative inefficacité permet de comprendre pourquoi les phénomènes collectifs prévalent de manière générale dans les plasmas, justifiant l'approche non-collisionnelle d'un grand nombre de phénomènes.

2.1 Sections efficaces

2.1.1 Collisions aux grands angles

L'angle de déflexion (dans le repère du centre de masse) lors d'une collision entre deux particules chargées, d'indices 1 et 2, est donné par la *formule de Rutherford*¹

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{b \mu v^2} \quad (2.1)$$

où $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ est la masse réduite, v la vitesse relative entre les deux particules et b le paramètre d'impact. Dans le cadre de ce cours, afin d'éviter des calculs trop compliqués, nous nous limiterons à la situation (d'intérêt!) de la collision d'une particule légère (un électron) sur des particules infiniment massives (des ions, de charge $+Ze$). Dans ce cas le référentiel du centre de masse est simplement le référentiel dans lequel l'ion est au repos, et la masse réduite est la masse de l'électron $\mu = m_e$. Il n'y a de plus aucun transfert d'énergie entre les deux particules dans ce cas : le module du

1. Dans ce chapitre, on utilisera la notation $q_e \equiv e/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$

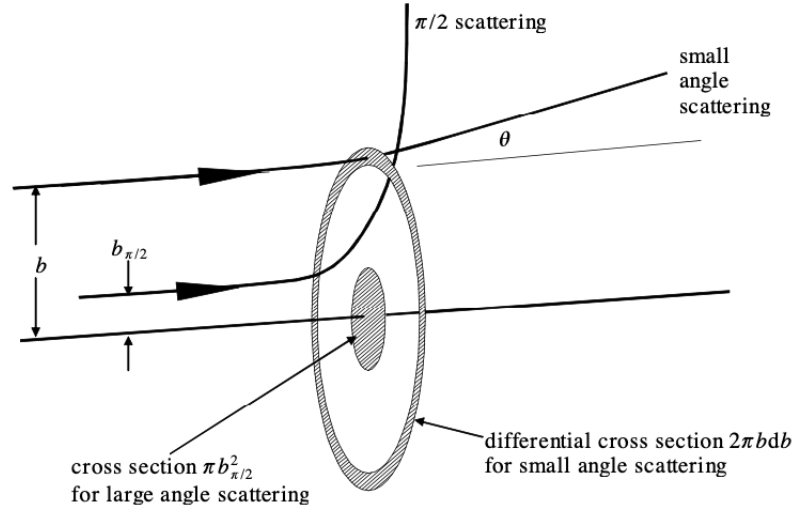


FIGURE 2.1 – Diffusion Rutherford

vecteur vitesse de l'électron est constant, il y a seulement déflexion de la trajectoire.

On a une déflexion de 90° lorsque le membre de droite est égal à 1, donc lorsque le paramètre d'impact vaut

$$b_{90}(v) = \frac{Zq_e^2}{m_e v^2} \quad (2.2)$$

ce paramètre d'impact est à rapprocher de la longueur de Landau, qu'on a introduit au chapitre précédent, $\lambda_L = 4\pi q_e^2/kT$: on voit que la longueur de Landau donne (en ordre de grandeur) le paramètre d'impact pour lequel une collision entre particules thermiques produira une déviation de grand angle. On a vu que $\lambda_L \ll \ell$ (ℓ étant la distance interparticulaire) : on peut donc s'attendre à ce qu'il y ait peu de collisions de grands angles dans les plasmas ; si par exemple on calcule l'angle de déviation d'une particule thermique pour un paramètre d'impact égal à la distance particulaire, on obtient $\theta \sim \lambda_L/\ell \sim \Gamma^{2/3}$. Dans le vent solaire, $\Gamma \sim 10^{-10}$, donc typiquement $\theta \sim 10^{-6}$ rad.

On définit la section efficace de collisions de grands angles comme $\sigma_{ga} = \pi b_{90}^2$. On considère un électron test, se déplaçant à la vitesse v dans un "champ de particules diffusantes" (des ions au repos), de densité n . Le libre parcours moyen d'une telle particule par rapport aux collisions de grands angles est $\lambda_{ga} = (\sigma_{ga}n)^{-1}$, et la fréquence de collisions associée

$$\nu_{ga} = v/\lambda = nv\pi b_{90}(v)^2 = \pi n \left(\frac{Zq_e^2}{m_e} \right)^2 \frac{1}{v^3} \quad (2.3)$$

La formule (2.3) donne le temps typique sur laquelle l'électron subira une collision de grand angle (au bout duquel il passera à une distance inférieure à b_{90} d'un ion). On peut remarquer que cette échelle de temps diminue très fortement avec la vitesse de la particule ; c'est une propriété générale des collisions coulombiennes, qui a des effets importants en physique des plasmas : plus un plasma est chaud, moins il est "collisionnel".

On peut pour finir ce paragraphe estimer en ordre de grandeur le libre parcours moyen d'une particule thermique pour les collisions aux grands angles,

$$\lambda_{l.a.} \sim (n\sigma_{l.a.})^{-1} \sim \frac{\ell^3}{\lambda_L^2} \sim \Gamma^{-2}\lambda_L \sim \Gamma^{-1}\lambda_D, \quad (2.4)$$

la sphère de Debye est donc peu collisionnelle ! (aux grands angles en tous cas)².

2.1.2 Collisions aux petits angles : le logarithme de Coulomb

Nous avons estimé la section efficace de collision à grands angles. Mais l'électron test est aussi défléchi continuellement suite aux interactions avec les particules situées à des distances plus grandes que b_{90} ; ces collisions, bien que générant des déflexions de petits angles, sont bien plus nombreuses que les déflexions aux grands angles. On doit donc se poser la question du mécanisme dominant la déflexion totale de la particule : les rares collisions de grands angles, ou la somme des très fréquentes collisions de petits angles ?

Lors d'une collision aux petits angles, l'angle de déviation de la particule test est³

$$\theta \simeq -\frac{2b_{90}(v)}{b} \quad (2.5)$$

ce qui correspond à une variation de la vitesse de la particule dans la direction de \mathbf{b}

$$\delta\mathbf{v}_\perp \simeq -v\theta\mathbf{u}_b = -\frac{2b_{90}(v)v}{b^2}\mathbf{b} \quad (2.6)$$

ce dernier résultat étant correct au premier ordre en θ (sinon il faut inclure une correction $\propto \theta^2$ dans la direction parallèle à \mathbf{v}).

Considérons à nouveau l'interaction d'un électron se déplaçant à la vitesse v avec des ions au repos, infiniment massifs, de densité n .

On se place en géométrie cylindrique, d'axe le vecteur vitesse \mathbf{v} de l'électron. Le nombre d'ions interagissant avec l'électron durant un temps Δt , avec avec un paramètre

2. Notons que les ordres de grandeurs obtenus sont corrects pour des collisions entre électrons, ou entre ions. La masse réduite est alors $\mu = m_s/2$ ($s = e, i$), et il faut faire un changement de référentiel du ref. du centre de masse vers le ref labo pour avoir l'angle de déviation exact, mais ces calculs donnent des corrections "de l'ordre de l'unité"

3. le signe "-" vient du fait que dans la formule 2.1, on a $q_1q_2 = -Zq_e^2$, l'électron et les ions étant de charges opposées. La déviation se fait donc "vers le bas" sur la fig.2.1

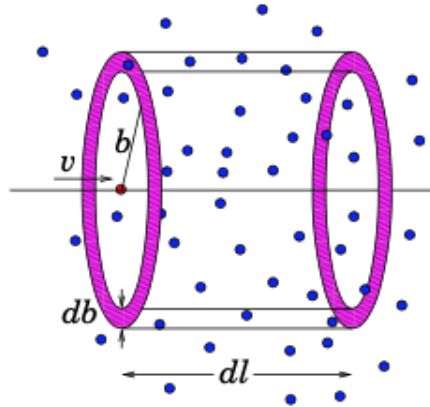


FIGURE 2.2 – Interaction de la particule test avec les centres de diffusion ioniques

d'impact vectoriel dont le module est compris entre b et $b + db$ et l'orientation entre ϕ et $\phi + d\phi$ est (cf. illustration sur la figure 2.2)

$$dN = d^2 \mathbf{b} v \Delta t = v \Delta t . b db . d\phi \quad (2.7)$$

La déflexion moyenne de la particule test sur l'intervalle de temps Δt est calculée en sommant les déflexions causées par toutes les particules du plasma. Nous intégrons donc sur tous les paramètres d'impact :

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\perp \rangle = \int \delta \mathbf{v}_\perp dN = 2nb_{90}(v)v^2 \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_b(\phi) d\phi \int db = 0 \quad (2.8)$$

où $\mathbf{u}_b(\phi) = \mathbf{b}/b$ est le vecteur unitaire radial en coordonnées polaires (cylindriques). L'intégrale de ce vecteur sur ϕ vaut 0 : on voit que les déflexions du vecteur vitesse se compensent en moyenne, ce qui était à attendre au vu de la symétrie du problème.

Mais si $\Delta \mathbf{v}_\perp$ est nul en moyenne, la variance $\langle \Delta v_\perp^2 \rangle$, quant à elle, augmente dans le temps. Celle-ci en effet est donnée par (en utilisant la même procédure qu'au dessus)

$$\langle \Delta v_\perp^2 \rangle = 8\pi n \Delta t b_{90}^2(v) v^3 \int \frac{db}{b}. \quad (2.9)$$

On remarque (avec consternation...) que l'intégrale (2.9), prise entre 0 et ∞ , diverge à la fois en 0 et en ∞ . La divergence pour $b \rightarrow \infty$ provient du fait que l'interaction coulombienne est à longue portée ($1/r^2$). Mais dans un plasma, l'écrantage de Debye raccourcit la portée effective de la force coulombienne. Ainsi, l'intégrale peut être régularisée « sur des bases physiques » en posant la borne supérieure de l'intégration égale à λ_D – en supposant que le potentiel d'interaction est nul après cette distance. L'intégrale diverge également pour $b \rightarrow 0$. Cela s'explique par le fait que les angles de déviation deviennent

infinis pour une valeur nulle du paramètre d'impact. Ce résultat (incorrect) provient du fait qu'on a utilisé pour le calcul une approximation de $\delta\mathbf{v}_\perp$ valable seulement pour de petits angles. Nous coupons donc l'intégrale pour les valeurs faibles de b à $b_{90}(v)$. Nous obtenons finalement pour la variation,

$$\frac{\langle\Delta v_\perp^2\rangle}{\Delta t} = 8\pi n b_{90}^2(v) v^3 \ln \Lambda \quad (2.10)$$

Nous avons introduit le logarithme de Coulomb

$$\ln \Lambda = \ln \lambda_D / b_{90} \sim \ln \Gamma^{-1} \quad (2.11)$$

Dans la plupart des plasmas (naturels ou artificiels), la valeur thermique du logarithme de Coulomb est $\ln \Lambda \sim 15 - 25$.

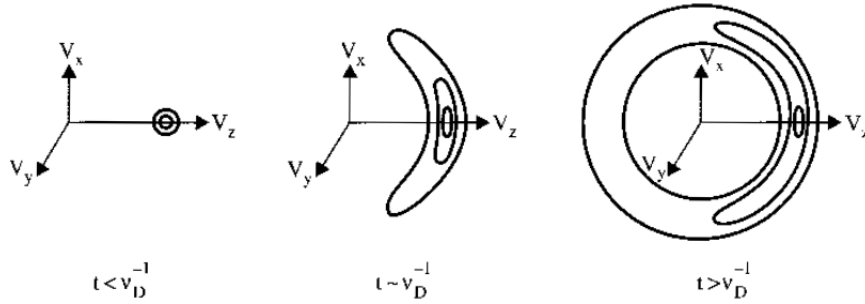


FIGURE 2.3 – Diffusion angulaire sur une échelle de temps caractéristique ν_D^{-1} (Trubnikov 1965).

Nous venons de montrer que la variance de l'angle de déviation $\theta = v_\perp/v$ augmente linéairement avec le temps. C'est caractéristique d'un processus de diffusion angulaire : la particule subit de nombreuses petites déviations aléatoires. L'effet n'est pas un changement de la direction moyenne du vecteur vitesse de la particule test, mais une augmentation de la probabilité de trouver ce vecteur dans une direction de plus en plus éloignée de sa direction initiale (cf. figure 2.3). Le coefficient de diffusion caractérisant ce processus est

$$D_\theta \equiv \frac{\langle\Delta\theta^2\rangle}{2\Delta t} = 4\pi n b_{90}^2(v) v \ln \Lambda = \nu_{ei} \left(\frac{v_{th}}{v}\right)^3 \quad (2.12)$$

où nous avons introduit la fréquence de collision thermique électron-ion

$$\nu_{ei} = \frac{4\pi n Z^2 q_e^4 \ln \Lambda}{m_e^2 v_{th}^3} \quad (2.13)$$

La fréquence de collision est ainsi définie, pour les collisions coulombiennes à petit angle, comme l'inverse du temps nécessaire à l'effet de diffusion pour élargir de manière substantielle la distribution angulaire des vitesses des particules.

Notons enfin que la fréquence de collision obtenue ν_{ei} est égale à celle que nous avons obtenue pour les collisions à grand angle dans la première section, multipliée par le logarithme de Coulomb $\ln \Lambda$ (et un facteur 4...). Cela donne une autre interprétation du logarithme de Coulomb (et du paramètre de plasma Γ) comme étant le rapport entre l'efficacité des collisions à petit angle et celle des collisions à grand angle. Puisque $\ln \Lambda \sim 20$, nous avons montré que la diffusion à petit angle est totalement dominante dans un plasma entièrement ionisé.

2.1.3 Force de frottement dynamique et effets associés

La diffusion angulaire qui vient d'être décrite s'accompagne nécessairement d'un ralentissement (un frottement) de l'électron dans la direction parallèle. Cela provient du fait que l'énergie totale \mathcal{E} de l'électron est conservée dans le processus de diffusion. On a

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} m_e \left((v + \Delta v_{\parallel})^2 + \Delta v_{\perp}^2 - v^2 \right) = 0 \quad (2.14)$$

d'où l'on obtient :

$$2v \Delta v_{\parallel} + \Delta v_{\perp}^2 + \Delta v_{\perp}^2 = 0. \quad (2.15)$$

Comme $\Delta v_{\parallel} \ll v$, le premier terme est beaucoup plus grand que le second, qui peut être négligé. En prenant la moyenne des termes restants, on obtient l'expression du ralentissement parallèle

$$\frac{\langle \Delta v_{\parallel} \rangle}{\Delta t} = -\frac{1}{v} \frac{\langle \Delta v_{\perp}^2 \rangle}{2\Delta t} = -\nu_{ei} \frac{v_{th}^3}{v^2} \quad (2.16)$$

Comme cette composante parallèle est appliquée le long du vecteur vitesse de l'électron \mathbf{v} , la force de frottement sur l'électron due à la diffusion angulaire peut être exprimée comme suit :

$$\mathbf{f} = \frac{m_e \langle \Delta v_{\parallel} \rangle}{\Delta t} \frac{\mathbf{v}}{v} = -m_e \nu_{ei} \frac{v_{th}^3}{v^3} \mathbf{v} \quad (2.17)$$

Il s'agit d'un résultat général : l'existence d'une diffusion angulaire dans l'espace des vitesses avec un coefficient de diffusion D_{θ} produit une force de frottement dynamique sur les particules diffusées $\mathbf{f} = -m_e D_{\theta} \mathbf{v}$. Nous nous intéressons dans les deux paragraphes suivants à des effets liés à l'existence de cette force de friction.

Électrons fugitifs ("runaway") et champ électrique de Dreicer

Un processus important en physique des plasmas, lié à la décroissance du taux de collision avec l'énergie des particules ($\propto v^{-3}$), est appelé « effet runaway ». La description correcte de cet effet nécessite un traitement cinétique ; nous proposons ici une représentation simplifiée, fournissant des ordres de grandeur corrects.

Considérons un électron dans un champ électrique constant \mathbf{E} , entrant en collision avec un fond d'ions. Son énergie cinétique (en fait, son énergie cinétique « dirigée » moyenne) vérifie

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = -e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} - m_e \nu_{ei} \frac{v_{th}^3}{v}. \quad (2.18)$$

Un électron ayant une vitesse v_{lim} telle que

$$v_{lim}(E) = \left(\frac{m_e \nu_{ei} v_{th}^3}{eE} \right)^{1/2} \quad (2.19)$$

ne perdra ni ne gagnera d'énergie du champ en moyenne. Un électron ayant une vitesse $v < v_{lim}$ sera « suramorti » (overdamped), ce qui signifie que sa vitesse diminuera en moyenne sous l'action de la friction avec les ions. Une particule dont la vitesse est supérieure à v_{lim} sera « sous-amortie », ce qui signifie que son énergie augmentera sans limite dans le temps sous l'action du champ électrique. Ces derniers électrons sont appelés électrons « fugitifs »

Notez que, aussi faible que puisse être le champ électrique appliqué, il y aura toujours une petite fraction d'électrons fugitifs dans la queue de la fonction de distribution de vitesse.

Le champ électrique de Dreicer est la valeur du champ électrique pour laquelle les électrons thermiques deviennent eux-mêmes fugitifs - à ce stade, aucun plasma stable ne peut réellement exister. Sa valeur est donnée par $v_{lim}(E_D) = v_{th}$,

$$E_D = \frac{m_e \nu_{ei} v_{th}}{e}. \quad (2.20)$$

Nous pouvons maintenant exprimer commodément $v_{lim}(E) = (E_D/E)^{1/2} v_{th}$.

Les électrons fugitifs sont importants en physique des plasmas, car ils peuvent extraire beaucoup d'énergie du champ électrique (ils peuvent être responsables de la rupture de l'état du plasma dans les expériences en laboratoire). Ils peuvent également jouer un rôle important (bien que pas toujours clairement envisagé) dans de nombreux plasmas astrophysiques.

Friction fluide (subsonique) et conductivité électrique

Nous cherchons ici à calculer la force de frottement \mathbf{f} agissant, non pas sur une seule particule, mais sur un petit volume de fluide électronique de densité n_e et de vitesse moyenne \mathbf{u} . Soit

$$\mathbf{f} = -m_e n_e \langle \nu_{ei} \frac{v_{th}^3}{v^3} \mathbf{v} \rangle = -m_e n_e \nu_{ei} v_{th}^3 \int \frac{\mathbf{v} d^3 \mathbf{v}}{v^3} f(\mathbf{v}) \quad (2.21)$$

où $f(\mathbf{v})$ est la distribution des vitesses du fluide électronique, définie de sorte que la probabilité de trouver un électron avec une vitesse comprise entre \mathbf{v} et $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ est $dp = f(\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}$. Nous supposons que notre élément fluide est proche de l'équilibre, de sorte que $f(\mathbf{v})$ est une gaussienne avec une vitesse thermique v_{th} et une vitesse de dérive \mathbf{u} telle que $u \ll v_{th}$. Nous avons

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_{th}^3} e^{-(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2/2v_{th}^2} \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_{th}^3} e^{-v^2/2v_{th}^2} \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{v_{th}^2} \right) \quad (2.22)$$

L'intégrale du premier terme est égale à 0, puisque l'intégrand est impaire. Regardons le deuxième terme : on définit l'axe z le long du vecteur \mathbf{u} . Les composantes x et y de \mathbf{f} sont nuls (intégrands impaires). Il ne reste donc que la composante le long de z , qui est égale à

$$f_z = -\frac{m_e n_e \nu_{ei} u}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{v_z^2 d^3v}{v_{th}^2 v^3} e^{-v^2/2v_{th}^2} \quad (2.23)$$

L'intégrale est calculée en coordonnées sphériques (avec le changement de variable pratique $\mu = \cos\theta$, donc $v_z = \mu v$ et $d^3v = v^2 dv d\mu d\phi$),

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu \int_0^\infty \frac{v dv}{v_{th}^2} e^{-v^2/2v_{th}^2} = 2\pi \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{4\pi}{3}. \quad (2.24)$$

Nous obtenons finalement

$$\mathbf{f} = -m_e n_e \frac{2\nu_{ei}}{3\sqrt{2\pi}} \mathbf{u} \equiv -\frac{m_e n_e \mathbf{u}}{\tau_{ei}}. \quad (2.25)$$

Il existe donc un facteur $2/3\sqrt{2\pi}$ entre la force visqueuse exercée sur le fluide et la force exercée sur un seul électron qui aurait une vitesse égale à la vitesse thermique. Dans la littérature, l'échelle de temps de frottement $\tau_{ei} = 3\sqrt{2\pi}/2\nu_{ei}$ est souvent introduite, comme dans l'équation précédente (2.25).

L'expression de cette force visqueuse permet de calculer facilement la conductivité électrique σ d'un plasma, selon le modèle dit *de Drude*. Considérons les ions au repos, de sorte que la densité de courant et le champ électrique sont liés par $\mathbf{j} = -en\mathbf{u} = \sigma\mathbf{E}$. Nous considérons des valeurs du champ électrique beaucoup plus petites que E_D , de sorte que nous pouvons négliger l'effet "runaway" : tous les électrons sont supposés être sous-amortis, de sorte qu'un état stationnaire peut être atteint dans le plasma. L'équation décrivant cet état est

$$0 = -e\mathbf{E} - m_e \mathbf{u}/\tau_{ei}, \quad (2.26)$$

la vitesse du fluide est donc

$$\mathbf{u} = -\frac{e\tau_{ei}}{m_e} \mathbf{E} \quad (2.27)$$

à partir de laquelle nous trouvons la valeur de la conductivité du plasma

$$\sigma = \frac{ne^2\tau_{ei}}{m_e} \quad (2.28)$$

Les plasmas spatiaux ne sont, à de rares exceptions près, jamais vraiment proches de l'équilibre (les distributions sont rarement maxwelliennes, et les libres parcours moyens grands devant les échelles typiques des systèmes). Les expressions de la conductivité obtenues ici doivent donc être considérées avec beaucoup de prudence dans de nombreux cas.

Chapitre 3: Orbites de particules chargées dans le champ électromagnétique

Nous avons vu qu'un plasma est caractérisé par un couplage fort entre la dynamique des particules et celle du champ électromagnétique. Pour comprendre un plasma, il est donc fondamental de bien comprendre le mouvement des particules chargées dans des champs électromagnétiques donnés.

Dans toute cette section, $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ est le vecteur champ magnétique. B est son module et \mathbf{b} le vecteur unitaire le long de la ligne du champ magnétique. La composante parallèle d'un vecteur est son produit scalaire avec \mathbf{b} , par exemple $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$. Sa composante perpendiculaire est le reste, $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - v_{\parallel}\mathbf{b}$.

3.1 Particule dans un champ constant et homogène

Nous commençons par le cas le plus simple, où les champs magnétique et électrique sont constants dans le temps et l'espace. Nous avons donc ici $B = \text{const.}$, et $\mathbf{b} = \text{const.}$

3.1.1 Le mouvement cyclotron

En l'absence de champ électrique, la force de Lorentz agissant sur une particule de charge q et de masse m est $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. Cette force ne produit aucun travail sur la particule, puisque $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$. L'énergie cinétique d'une particule dans un champ purement magnétique est donc une constante du mouvement.

En séparant l'équation du mouvement $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}/m$ entre les composantes parallèles et perpendiculaires, on obtient

$$\begin{cases} \dot{v}_{\parallel} = 0 \\ \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \omega_c \mathbf{v}_{\perp} \wedge \mathbf{b}. \end{cases} \quad (3.1)$$

où nous avons introduit la *fréquence cyclotronique* de la particule¹ $\omega_c = qB/m$. Ainsi, la composante parallèle de la vitesse de la particule est une constante du mouvement, et la norme de sa composante perpendiculaire en est une autre. En introduisant deux axes

1. Notez que ω_c est une quantité algébrique, qui peut être positive ou négative selon le signe de q .

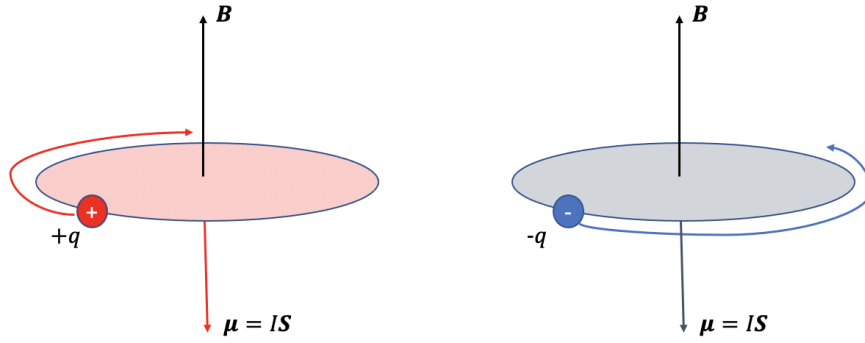


FIGURE 3.1 – Mouvement cyclotronique de particules chargées positivement et négativement. Le courant $I \propto qv$ est orienté dans la même direction dans les deux cas, d'où la direction antiparallèle du moment magnétique, indépendante de la charge de la particule – cf. sec.3.1.2.

cartésiens (x, y) dans le plan perpendiculaire à \mathbf{b} , et en utilisant les notations complexe $\bar{r}_\perp = x + iy$ et $\bar{v}_\perp = \dot{\bar{r}}_\perp = v_x + iv_y$, nous obtenons

$$\dot{\bar{v}}_\perp = -i\omega_c \bar{v}_\perp \Rightarrow \bar{v}_\perp = \bar{v}_\perp(0)e^{-i\omega_c t} \quad (3.2)$$

et la trajectoire de la particule est donnée par

$$\dot{\bar{r}}_\perp = \bar{v}_\perp \Rightarrow \bar{r}_\perp = \bar{r}_\perp(0) + \frac{i\bar{v}_\perp(0)}{\omega_c} (e^{-i\omega_c t} - 1). \quad (3.3)$$

Ainsi, la particule décrit un cercle dans le plan perpendiculaire. Le rayon de ce cercle est $\rho_\ell = |v_\perp/\omega_c|$, et est appelé le rayon de Larmor de la particule (et est une quantité positive). Une particule de charge positive décrit un cercle dans le sens horaire autour de \mathbf{b} (polarisation droite), tandis qu'une particule de charge négative décrit un cercle dans le sens antihoraire (polarisation gauche).²

Un peu plus de vocabulaire : l'angle du vecteur vitesse par rapport à la ligne de champ magnétique est appelé l'angle d'attaque θ (*pitch angle* en anglais),

$$\theta = \arccos \frac{v_\parallel}{v} = \arctan \frac{v_\perp}{v_\parallel} \quad (3.4)$$

La phase de rotation de la particule dans le plan perpendiculaire est appelée gyrophase,

$$\varphi(t) = \omega_c t + \arg i\bar{v}_\perp(0) \quad (3.5)$$

2. Les sens "horaire" et "anti-horaire" sont définis par rapport à un champ magnétique pointant vers l'observateur.

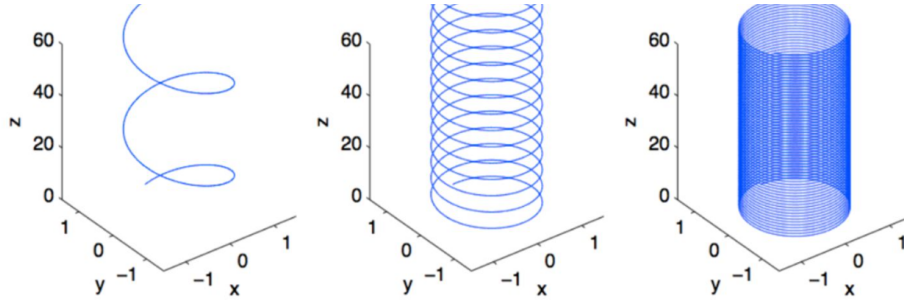


FIGURE 3.2 – Trajectoires d’une particule chargée positivement dans un champ magnétique constant dirigé le long de l’axe z , pour trois valeurs différentes de son angle d’attaque ($\theta = 10^\circ, 45^\circ, 80^\circ$ de gauche à droite). Les distances sont normalisées par rapport au rayon de Larmor de la particule.

La position moyenne (sur le mouvement cyclotron) d’une particule est appelée la position de son centre guide \mathbf{R}_g . Dans le cas présent,

$$\mathbf{R}_g(t) = \mathbf{R}_g(0) + v_{\parallel} t \mathbf{b}, \quad (3.6)$$

le centre guide suit la ligne de champ magnétique rectiligne, à une vitesse constante.

En régime relativiste, l’équation du mouvement est $\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ avec $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, où $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ est le facteur de Lorentz. En prenant le produit scalaire avec \mathbf{v} , on voit immédiatement que $v = \text{const.}$, donc le facteur de Lorentz est également une constante et l’analyse faite ci-dessus reste valable, avec le changement $\omega_c = qB/\gamma m$. Le rayon de Larmor est $\rho_\ell = \gamma m v_{\perp} / qB = p_{\perp} / qB$.

Dernière précision terminologique : dans le contexte de la physique des (astro-)particules, la quantité de mouvement d’une particule dans un champ magnétique est souvent décrite par sa rigidité, qui est mesurée en volts et définie comme suit :

$$R = \rho_\ell c B = \frac{p_{\perp} c}{|q|} \quad (3.7)$$

Ordres de grandeur utiles :

— Fréquence gyroscopique de l’électron

$$\omega_{c,e} [\text{rad.s}^{-1}] \simeq 176 \frac{B[\text{nT}]}{\gamma} \quad f_{c,e} [\text{Hz}] \simeq 28 \frac{B[\text{nT}]}{\gamma} \quad (3.8)$$

— Fréquence gyroscopique ionique (numéro atomique Z , nombre de masse A)

$$\omega_{c,i} [\text{rad.s}^{-1}] \simeq 10^{-1} \frac{Z B[\text{nT}]}{A \gamma} \quad f_{c,i} [\text{Hz}] \simeq 1,5 \times 10^{-2} \frac{Z B[\text{nT}]}{A \gamma} \quad (3.9)$$

— Rayon de Larmor (limite non relativiste, $\mathcal{E}_\perp = p_\perp^2/2m = mv_\perp^2/2$)

$$\rho_{\ell,e} [\text{km}] \simeq 3,4 \frac{\sqrt{\mathcal{E}_\perp} [\text{eV}]}{B [\text{nT}]} \quad \rho_{\ell,i} [\text{km}] \simeq 144 \frac{\sqrt{\mathcal{E}_\perp} [\text{eV}]}{B [\text{nT}]} \times \frac{\sqrt{A}}{Z} \quad (3.10)$$

où \mathcal{E}_\perp est l'énergie cinétique perpendiculaire de la particule.

— Rayon de Larmor (limite ultra-relativiste, $\mathcal{E}_\perp = p_\perp c$)

$$\rho_\ell [\text{A.U.}] \simeq 2 \times 10^{-2} \frac{\mathcal{E}_\perp [\text{GeV}]}{B [\text{nT}]} \equiv 2 \times 10^{-2} \frac{R [\text{GV}]}{B [\text{nT}]} \quad (3.11)$$

3.1.2 Diamagnétisme du plasma

Les particules chargées dans un champ \mathbf{B}_0 tournent de manière à produire un courant qui génère à son tour un champ magnétique $\delta\mathbf{B}$ opposé à \mathbf{B}_0 (cf. figure 3.1). Le plasma est donc un milieu diamagnétique. Le moment magnétique microscopique $\boldsymbol{\mu}$ associé à la boucle de courant d'une particule en rotation est

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{S} = -\frac{q\omega_c}{2\pi} \pi \rho_\ell^2 \mathbf{b} = -\frac{\mathcal{E}_\perp}{B} \mathbf{b}. \quad (3.12)$$

Il est indépendant de la charge de la particule, puisque $q\omega_c > 0$ quel que soit le signe de la particule. Le vecteur magnétisation est donné par la densité volumique de moments magnétiques qui, dans un plasma de densité n , est

$$\mathbf{M} = 2n\boldsymbol{\mu} = -\frac{2nkT_\perp}{B} \mathbf{b}, \quad (3.13)$$

si l'on suppose que les électrons et les ions ont la même température $kT_\perp = \langle \mathcal{E}_\perp \rangle$. Notez que le plasma n'est pas un milieu magnétique linéaire, puisque $M \propto 1/B$.

Considérons la situation suivante : un système de courants \mathbf{j}_{ext} , externes au plasma (circulant par exemple dans un solénoïde), produit un champ magnétique \mathbf{B}_0 dans le plasma. Quelle diminution du champ magnétique à l'intérieur du plasma sera produite par le mouvement cyclotron des particules ? Le courant produit par les mouvements cyclotrons vaut $\mathbf{j}_{mag} = \nabla \wedge \mathbf{M}$, ainsi le champ total dans le plasma vaut

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} \simeq \left(1 - \frac{nkT_\perp}{B_0^2/2\mu_0}\right) \mathbf{B}_0 \simeq (1 - \beta) \mathbf{B}_0 \quad (3.14)$$

où nous avons introduit le paramètre adimensionné β , égal au rapport entre la pression du plasma et la pression du champ ma-

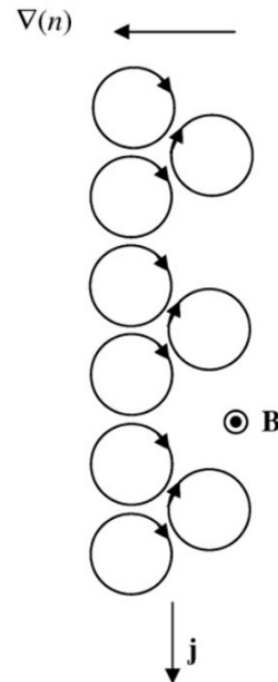


FIGURE 3.3 – Origine du courant de magnétisation.

gnétique. À proprement parler, notre expression n'est valable que dans la limite de valeurs très faibles de β (car la magnétisation a été calculée à partir du champ externe \mathbf{B}_0 et non de manière cohérente à partir du champ magnétique dans le plasma \mathbf{B}). Mais cette expression montre bien que la pression thermique diminue la valeur du champ magnétique externe à l'intérieur du plasma.

La densité de courant associée à la magnétisation est

$$\mathbf{j}_{mag} = \nabla \wedge \mathbf{M} = -\frac{\nabla(2nkT_{\perp}) \wedge \mathbf{b}}{B} \quad (3.15)$$

et est appelée densité de *courant de magnétisation*. Elle est perpendiculaire à la fois au champ magnétique et au gradient de pression. Ce courant n'est pas associé à un déplacement physique moyen de particules chargées dans le volume du plasma, mais résulte de la non-compensation des courants transportés par la rotation de Larmor des particules lorsqu'il existe un gradient de pression.

3.1.3 Champ électrique constant, dérive en champ croisés

En présence d'un champ électrique constant, l'équation du mouvement de la particule chargée est désormais la suivante :

$$\begin{cases} \dot{v}_{\parallel} = qE_{\parallel}/m \\ \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \omega_c \mathbf{v}_{\perp} \wedge \mathbf{b} + q\mathbf{E}_{\perp}/m. \end{cases} \quad (3.16)$$

Par conséquent, le mouvement le long du champ magnétique est uniformément accéléré, comme il le serait en l'absence de champ magnétique,

$$v_{\parallel}(t) = v_{\parallel}(0) + \frac{qE_{\parallel}t}{m} \quad r_{\parallel}(t) = r_{\parallel}(0) + v_{\parallel}(0)t + \frac{qE_{\parallel}t^2}{2m} \quad (3.17)$$

Le mouvement dans le plan perpendiculaire comprend deux composantes. La première est donnée par la solution de l'équation homogène et correspond au mouvement cyclotronique, tel qu'étudié au début de cette section – cf. équations (3.2)-(3.3) . La deuxième composante est donnée par une solution particulière de l'équation différentielle. Une solution triviale est celle avec une vitesse constante $\dot{\mathbf{v}}_{\perp,p} = 0$,

$$\mathbf{v}_{\perp,p} \wedge \mathbf{b} = -\frac{q\mathbf{E}_{\perp}}{m\omega_c} \Rightarrow \mathbf{v}_{\perp,p} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \wedge \mathbf{b}}{B}. \quad (3.18)$$

Cette vitesse perpendiculaire constante apparaissant en présence d'un champ électrique est appelée *dérive en champs croisés* ou plus trivialement « dérive \mathbf{E} cross \mathbf{B} ». Elle joue un rôle très important en physique des plasmas.

$$\mathbf{v}_\wedge = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.19)$$

Il est important de noter que cette dérive ne dépend ni de la charge ni de la masse des particules : sous l'action d'un champ électrique constant, le plasma dérive dans son ensemble dans une direction à la fois perpendiculaire à \mathbf{E} et à \mathbf{B} .

Une interprétation directe de cette dérive vient de la transformation du champ électrique par un changement de référentiel. Dans la limite non relativiste, le changement est $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}_{R'/R} \wedge \mathbf{B}$; le champ magnétique est quant à lui invariant par changement de référentiel galiléen. Par conséquent, il est toujours possible de trouver un référentiel dans lequel la composante perpendiculaire du champ électrique s'annule et le mouvement de la particule chargée consiste en un pur mouvement cyclotronique. La vitesse de ce référentiel spécifique vérifie

$$\mathbf{u}_{R'/R} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{u}_{R'/R} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2} = \mathbf{v}_\wedge. \quad (3.20)$$

La vitesse de la particule dans le référentiel R est alors la superposition du mouvement cyclotronique, qui est le seul mouvement dans R' , et du mouvement du référentiel R' par rapport à R ³.

3.1.4 Champ de force constant

Sous l'action d'un champ de force homogène \mathbf{F} , l'analyse effectuée dans le cas spécifique du champ électrique reste valable. Il suffit de remplacer \mathbf{E} par \mathbf{F}/q pour obtenir l'expression générique de la dérive de force

$$\mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{F} \wedge \mathbf{B}}{qB^2}. \quad (3.21)$$

Cette dérive de force dépend de la charge de la particule (si \mathbf{F} ne dépend pas linéairement de q). Par conséquent, les ions et les électrons dériveront généralement dans des directions opposées, produisant un courant de dérive et une polarisation du plasma. Les forces gravitationnelles et inertielles sont, pour ces raisons, responsables de l'apparition de courants de plasma.

3. A méditer : on peut donc, d'une certaine manière, considérer la vitesse $\mathbf{v}_\wedge = \mathbf{u}_{R'/R}$ comme la vitesse des lignes de champ magnétique elles-mêmes, et le référentiel dans lequel le champ \mathbf{E} s'annule comme lui dans lequel le champ est au repos.

3.2 Mouvement des particules dans un champ inhomogène

Dans cette section, nous considérons le mouvement des particules dans des champs qui peuvent varier dans l'espace, en supposant la variation faible sur l'échelle de longueur associée au mouvement cyclotronique : $\rho_\ell \cdot \nabla \ll 1$

3.2.1 Mouvement du centre guide : équations générales

Nous séparons le mouvement d'une particule en une composante cyclotronique et le mouvement du centre guide :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}_g(t) + \mathbf{r}_\ell(t), \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{V}_g(t) + \mathbf{v}_\ell(t), \quad (3.22)$$

où $\mathbf{v}_\ell(t) = \dot{\mathbf{r}}_\ell(t)$ est perpendiculaire à \mathbf{b} et solution de l'équation

$$\frac{d\mathbf{v}_\ell}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v}_\ell \wedge \mathbf{B}(\mathbf{R}_g), \quad (3.23)$$

En moyennant sur le mouvement cyclotron, nous obtenons $\langle \mathbf{r}(t) \rangle = \mathbf{R}_g(t)$, et $\langle \mathbf{v}(t) \rangle = \mathbf{V}_g(t)$.

Nous effectuons un développement de Taylor des champs sur l'échelle de rotation de Larmor des particules

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{R}_g) + \mathbf{r}_\ell \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{R}_g) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{B}(\mathbf{R}_g) + \mathbf{r}_\ell \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{R}_g). \quad (3.24)$$

La dynamique de la particule dans les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ est décrite par

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_\ell}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E}(\mathbf{R}_g) + \mathbf{r}_\ell \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{R}_g) + (\mathbf{V}_g + \mathbf{v}_\ell) \wedge (\mathbf{B}(\mathbf{R}_g) + \mathbf{r}_\ell \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{R}_g))). \quad (3.25)$$

En utilisant la définition (3.23) et faisant la moyenne sur le mouvement cyclotron (ce qui annule tous les termes linéaires en \mathbf{r}_ℓ , on obtient

$$m \frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = q (\mathbf{E}(\mathbf{R}_g) + \mathbf{V}_g \wedge \mathbf{B}(\mathbf{R}_g) + \langle \mathbf{v}_\ell \wedge \mathbf{r}_\ell \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{R}_g) \rangle). \quad (3.26)$$

Le terme entre crochets peut être évalué de manière un peu fastidieuse (cf. exercice), sous la forme

$$\langle \mathbf{v}_\ell \wedge \mathbf{r}_\ell \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{R}_g) \rangle = -\frac{v_\perp^2}{2\omega_c} \nabla B = -\frac{\mu}{q} \nabla B. \quad (3.27)$$

L'équation du mouvement du centre guide de la particule est ainsi

$$m \frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = q (\mathbf{E}(\mathbf{R}_g) + \mathbf{V}_g \wedge \mathbf{B}(\mathbf{R}_g)) - \mu \nabla B. \quad (3.28)$$

Nous faisons à présent l'hypothèse que l'on peut écrire la solution de cette équation sous la forme

$$\mathbf{V}_g(t) = v_{\parallel}(t) \mathbf{b} + \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\perp^1 \quad (3.29)$$

où $\mathbf{v}_\wedge = \mathbf{E}(\mathbf{R}_g) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{R}_g)/\mathbf{B}(\mathbf{R}_g)^2$, et $d\mathbf{v}_\perp^1/dt \ll d\mathbf{v}_\wedge/dt$. Cela revient à décomposer le mouvement en composantes parallèle et perpendiculaire d'une part, et à décomposer la composante perpendiculaire en une composante de dérive en champ croisés, qui serait présente même en l'absence de toute inhomogénéité de champ, et d'une composante lentement variable \mathbf{v}_\perp^1 liée à l'existence d'inhomogénéités.

La dérivée de V_g s'écrit (en négligeant donc la dérivée du terme \mathbf{v}_\perp^1)

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} \simeq \frac{dv_\parallel}{dt} \mathbf{b} + v_\parallel \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_\wedge}{dt} \quad (3.30)$$

Ce qui permet finalement d'écrire l'équation du mouvement sous la forme

$$\frac{dv_\parallel}{dt} \mathbf{b} + v_\parallel \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_\wedge}{dt} = q\mathbf{E}_\parallel + q\mathbf{v}_\perp^1 \wedge \mathbf{B}(\mathbf{R}_g) - \mu \nabla B. \quad (3.31)$$

Cette dernière équation constitue la base d'étude du mouvement du centre guide dans des champs non homogènes. Notez que l'inhomogénéité du champ électrique ne joue aucun rôle dans ce mouvement⁴. Dans le paragraphe suivant, nous étudions le mouvement parallèle, puis nous examinerons les dérives perpendiculaires.

3.2.2 Force miroir et conservation du moment magnétique

En prenant le produit scalaire de l'équation (3.31) avec \mathbf{b} , on obtient :

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} = qE_\parallel - \mu \mathbf{b} \cdot \nabla B \quad (3.32)$$

On a deux termes dans le membre de droite. D'une part le champ électrique qui accélère la particule le long de la ligne de champ. D'autre part un terme dit de *force miroir*, dont on va voir qu'il joue le rôle d'une pseudo-force qui modifie l'angle du vecteur vitesse avec le champ moyen, en présence d'un gradient parallèle de champ magnétique (lignes de champ convergentes ou divergentes).

Dans la suite on ne s'intéresse qu'au terme de force miroir. Montrons que l'équation (3.32) implique que le moment magnétique μ de la particule est une constante du mouvement. La variation de l'énergie cinétique parallèle est

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 \right) = -\mu v_\parallel \mathbf{b} \cdot \nabla B = -\mu \frac{dB}{dt} \quad (3.33)$$

où nous avons supposé que le champ magnétique ne varie pas avec le temps ($\partial_t B = 0$) et $dB/dt = \mathbf{v} \cdot \nabla B$ est la variation du champ le long de la trajectoire de la particule. Comme l'effet n'implique aucun champ électrique, l'énergie cinétique de la particule reste constante (la force magnétique ne travaille pas). Nous devons donc avoir

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{E}_\perp + \mathcal{E}_\parallel \right) = \frac{d}{dt} (\mu B) - \mu \frac{dB}{dt} = B \frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (3.34)$$

4. En réalité, elle intervient comme un effet de second ordre, impliquant la dérivée seconde de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

Puisque $B \neq 0$, le moment magnétique μ doit être conservé le long de la trajectoire de la particule.

En l'absence de champ électrique (ou de toute autre force produisant un travail sur la particule). On peut facilement réécrire la conservation de l'énergie cinétique de la particule sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2(s) + \mu B(s) = \mathcal{E} = \text{const.} \quad (3.35)$$

où s est une coordonnée le long d'une ligne de champ magnétique. Puisque μ est une constante, le module du champ magnétique $B(s)$ joue exactement le rôle d'une énergie potentielle pour le mouvement parallèle : une forte augmentation du champ magnétique (correspondant à une forte convergence des lignes de champ) réfléchira les particules chargées comme un miroir, et un "trou" de champ magnétique pourra piéger des particules chargées comme un puits de potentiel : on parle dans ce cas de bouteille magnétique.

Bouteille magnétique

Une configuration de champ magnétique présentant deux points de convergence des lignes est appelée « bouteille magnétique ». Une telle configuration est caractérisée par le rapport $R_m = B_{max}/B_{min}$ (*mirror ratio* en anglais), qui caractérise son efficacité à piéger les particules.

Une particule s'échappera de la bouteille si son énergie cinétique totale vérifie $\mathcal{E} > \mu B_{max}$. Si nous appelons θ_{min} l'angle d'attaque de la particule à la position où le champ magnétique est B_{min} , alors on peut écrire la condition d'échappement de la façon suivante

$$\sin^2 \theta_{min} < \frac{B_{min}}{B_{max}} = 1/R_m. \quad (3.36)$$

L'expression (3.36) définit $\theta_m = \arcsin \sqrt{1/R_m}$, le demi-angle au sommet d'un cône dans l'espace des vitesses, appelé *cône de perte*. Les particules à l'intérieur du cône de perte pourront s'échapper du piège magnétique. Par conséquent, la fonction de distribution de vitesse du plasma à l'intérieur d'une bouteille magnétique n'est généralement pas une fonction maxwellienne isotrope à l'équilibre, mais une fonction vidée des particules de petit angle d'attaque (si les collisions sont complètement négligées). Les collisions (ou certaines instabilités électromagnétiques) auront tendance à envoyer les particules à l'intérieur du cône de perte, produisant une fuite continue - la bouteille n'est donc pas étanche.

Conservation du flux magnétique à travers le contour de Larmor

Une conséquence de la force miroir est que le flux du champ magnétique à travers une surface reposant sur le contour défini par le rayon de Larmor de la particule est

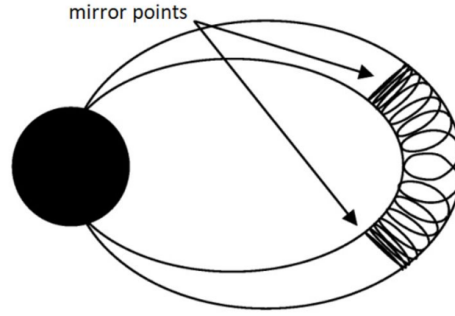


FIGURE 3.4 – Trajectoire d’une particule dans une configuration en bouteille magnétique produite par les lignes de champ convergentes d’un dipôle magnétique planétaire.

toujours conservé. Cela peut être facilement montré à partir de l’expression de ce flux

$$\Phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \simeq B(s)\pi\rho(s)^2 = \frac{\pi m^2 v_{\perp}^2}{q^2} \frac{1}{B} = \frac{2\pi m}{q^2} \mu = \text{const.} \quad (3.37)$$

Ce résultat est particulièrement pratique pour se représenter la trajectoire d’une particule chargée : la trajectoire s’enroule autour d’un tube de flux magnétique. Ceci est illustré par la figure 3.4.

3.2.3 Dérives perpendiculaires

Nous obtenons le mouvement perpendiculaire du centre de guide en prenant le produit vectoriel de l’équation (3.31) par \mathbf{b} . Nous obtenons

$$\mathbf{v}_{\perp}^1 = \frac{1}{\omega_c} \mathbf{b} \wedge \left(\frac{\mu}{m} \nabla B + v_{\parallel} \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} \right) \quad (3.38)$$

Le premier terme entre parenthèses décrit la dérive dite (de façon peu inspirée...) « grad B » (*grad B drift* en anglais). Les deux autres termes décrivent des effets inertiels, liés à l’existence d’une accélération du centre guide. Le premier de ces deux termes est la *dérive de courbure*, et le troisième la *dérive de polarisation*.

Notons qu’aucun des termes entre parenthèses ne dépend de la charge ou de la masse de la particule. Ainsi, les seules dépendances à la masse et à la charge sont contenues dans ω_c . Cela a deux conséquences : premièrement, les électrons et les ions dériveront dans des directions opposées dans un champ B inhomogène, créant des courants de polarisation dans le plasma. Deuxièmement, toutes ces vitesses de dérive sont proportionnelles au rapport masse/charge et seront donc essentiellement transportées par les espèces ioniques du plasma. Nous passons en revue ces trois termes dans les paragraphes suivants.

Dérive grad-B

La dérive grad-B résulte de l'existence d'un gradient perpendiculaire du module du champ magnétique. L'expression de la vitesse de dérive est la suivante :

$$\mathbf{v}_\nabla = \frac{\mu}{q} \frac{\mathbf{B} \wedge \nabla B}{B^2} = -\frac{mv_\perp^2}{2qB} \frac{\nabla B \wedge \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.39)$$

Le centre guide dérive dans une direction à la fois perpendiculaire au champ et au gradient du champ. Qualitativement, cela peut être interprété comme le fait que le rayon de Larmor est légèrement plus petit dans la région de champ élevé que dans la région de champ faible, ce qui rend la trajectoire cycloïdale dans la direction perpendiculaire à ∇B .

Dérive de courbure

La dérivée totale de \mathbf{b} le long de la trajectoire de la particule est

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \partial_t \mathbf{b} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{b} = \partial_t \mathbf{b} + v_\perp \cdot \nabla \mathbf{b} + v_\parallel \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}, \quad (3.40)$$

en conséquence de quoi cette dérive inertielle est à proprement parler composée de trois termes. En pratique, on a presque toujours $v_\parallel \gg v_\perp$ et $v_\parallel \mathbf{b} \cdot \nabla \gg \partial_t$ (c'est-à-dire que la particule percevra les changements spatiaux dans la direction de \mathbf{B} le long de sa trajectoire beaucoup plus rapidement que tout changement temporel intrinsèque dans la direction de la ligne de champ). La dérive est ainsi généralement presque uniquement due au terme de courbure. En introduisant le rayon de courbure local de la ligne de champ R_c tel que

$$\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} = -\frac{\mathbf{n}}{R_c} \quad (3.41)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire perpendiculaire à la trajectoire (orienté vers l'extérieur à partir du centre de courbure), on peut commodément exprimer la dérive comme suit

$$\mathbf{v}_c = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{B} \wedge v_\parallel^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b})}{B^2} = \frac{mv_\parallel^2}{qR_c} \frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.42)$$

Notons enfin que la partie gauche du produit vectoriel est la force centrifuge $\mathbf{F} = mv_\parallel^2 \mathbf{n}/R_c$ appliquée sur une particule suivant une trajectoire courbe à vitesse constante v_\parallel . Cette dérive de courbure apparaît alors comme la dérive de force discutée précédemment – eq.(3.21), pour le cas particulier de la force centrifuge.

Dérive de polarisation

Le dernier terme de l'équation (3.38) implique la dérivée temporelle de la dérive en champ croisés. Il est en particulier important lorsqu'il existe un champ électrique perpendiculaire variable dans le temps dans le plasma, $\dot{\mathbf{E}}_\perp$. La vitesse de dérive est dans ce cas

$$\mathbf{v}_p = \frac{m}{qB^2} \frac{\mathbf{B} \wedge (\dot{\mathbf{E}}_\perp \wedge \mathbf{B})}{B^2} = \frac{m}{qB^2} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt}, \quad (3.43)$$

et est appelée dérive de polarisation. Cette dérive est (pour une fois) parallèle au champ électrique appliqué et contribue de manière prépondérante à la polarisabilité perpendiculaire (ou réponse diélectrique) d'un plasma magnétisé en basse fréquence ($\omega \ll \omega_c$), d'où son nom. Le courant de polarisation produit par l'application d'un champ électrique alternatif à un plasma est (en négligeant la contribution des électrons) :

$$\mathbf{j}_p = \sum_s n_s q_s \mathbf{v}_s \simeq \frac{nm_i}{B^2} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{P} \simeq \frac{nm_i}{B^2} \mathbf{E}_\perp \equiv \varepsilon_0 \chi_\perp \mathbf{E}_\perp \quad (3.44)$$

où \mathbf{P} est le vecteur de polarisation du plasma, $\chi_\perp = \rho_m / \varepsilon_0 B^2$ la susceptibilité diélectrique et $\varepsilon_\perp = \varepsilon_0 (1 + \chi_\perp)$ la fonction diélectrique perpendiculaire (i.e. pour un champ appliqué \mathbf{E}_\perp perpendiculaire au champ magnétique) du plasma magnétisé. On a introduit la masse volumique du plasma $\rho_m \simeq nm_i$ et supposé les ions de charge $+e$.

3.3 Invariants adiabatiques

On rappelle ici un résultat utile de mécanique analytique. Un mouvement périodique de période T est caractérisé par l'existence d'invariants dits *de Poincaré*, qui restent approximativement constants sous des variations des paramètres du système lentes par rapport à T . Ces invariants prennent la forme

$$I = \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \quad (3.45)$$

où \mathbf{p} et \mathbf{q} sont des variables dynamiques conjuguées, et l'intégrale fermée implique qu'elle est effectuée sur une période complète, dont la trajectoire décrit en effet une courbe fermée dans l'espace des phases. Ces invariants peuvent également être formulés, d'une manière souvent plus pratique dans les applications, comme une intégrale sur le temps

$$I = \int_{T_q} W_q(t) dt = \langle W_q(t) \rangle T_q, \quad (3.46)$$

où T_q est la période associée au mouvement périodique de la coordonnée q , et $W_q = \dot{q}/2m$ est l'énergie associée au degré de liberté décrit par (p, q) .

On peut montrer que ces intégrales sont conservées au premier ordre en T_q/τ , où τ est l'échelle de temps sur laquelle la perturbation du système est appliquée.

L'existence de ces invariants s'avère très pratique pour étudier les mouvements périodiques en général, et le mouvement des particules chargées dans un champ magnétique en particulier. L'exemple de la trajectoire d'une particule dans une bouteille magnétique dont la structure varie lentement dans le temps (ou de manière semblable, d'une particule piégée dans le champ du dipole magnétique terrestre), est à ce titre intéressant, et "paradigmatique".

3.3.1 Premier invariant adiabatique : le moment magnétique

Nous considérons d'abord le mouvement périodique le plus rapide du système, c'est-à-dire la rotation cyclotronique. L'invariant adiabatique associé est

$$I_1 = \langle W_q(t) \rangle T_q = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{q} \mu \quad (3.47)$$

qui correspond au moment magnétique de la particule, à un facteur constant près. Nous retrouvons ainsi la constance de cette quantité, que nous avons déjà observée par l'action de la force miroir, pour un champ magnétique variant dans le temps.

3.3.2 Deuxième invariant adiabatique : mouvement de rebond

Dans une bouteille magnétique, une particule d'énergie \mathcal{E} oscille périodiquement entre deux points miroirs dont les positions sont données par $\mu B(s_m) = \mathcal{E}$, comme vu précédemment. Appelons T_b la « période de rebond » de ce mouvement. L'invariant adiabatique associé est

$$I_2 = \langle W_s(t) \rangle T_s = \frac{1}{2} m \langle v_{\parallel}^2 \rangle T_b \quad (3.48)$$

Ainsi, si la période de rebond de la particule varie dans le temps (à des échelles de temps beaucoup plus grandes que T_b), l'énergie cinétique parallèle de la particule variera également. Il y a deux raisons principales pour lesquelles cela peut se produire :

- Les dérives perpendiculaires peuvent transporter la particule vers des lignes de champ plus courtes (où la configuration est telle que les points miroirs sont plus rapprochés) : la période de rebond diminue alors et l'énergie cinétique moyenne de la particule augmente. Bien sûr, le raisonnement inverse s'applique si la particule dérive vers des lignes de champ "plus longues".
- La configuration du champ magnétique peut présenter une variation temporelle intrinsèque. Par exemple, la bouteille magnétique peut se contracter sur elle-même, et la particule sera piégée entre deux parois magnétiques qui se rapprochent. Elle gagnera ainsi de l'énergie : ce phénomène est appelé accélération de Fermi de premier ordre, et peut être responsable de la production de rayons cosmiques de haute énergie.

3.3.3 Troisième invariante adiabatique : flux magnétique enfermé

Un troisième mouvement périodique peut être identifié dans les pièges magnétiques. Sur des temps très grands devant la période de rebond, la particule peut être considérée comme une « coquille magnétique », constituée du tube de flux magnétique délimité par ses deux points miroirs. Cette coquille magnétique se déplace perpendiculairement aux lignes de champ sous l'effet des dérives perpendiculaires. Dans l'exemple d'une particule piégée dans le champ dipolaire terrestre, ce mouvement sera azimutal et associé à une

quantité de mouvement $p_\phi = mv_\phi + qA_\phi$, où \mathbf{A} est le potentiel vectoriel du champ. On a alors

$$I_3 = \int_0^{2\pi} p_\phi r d\phi \simeq q \oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q\Phi_B \sim q\pi R^2 B_0 \quad (3.49)$$

où l'on a supposé (ce qui est valable pour la plupart des applications) que $qA_\phi \gg mv_\phi$. Φ_B est le flux magnétique à travers la surface délimitée par le mouvement azimutal de la particule autour de la Terre, et R le rayon approximatif de ce mouvement azimutal. Ainsi, si, pour une raison quelconque, le champ magnétique effectif B_0 de la Terre augmente, l'orbite de la particule aura tendance à diminuer son rayon afin de maintenir Φ_B constant. Cette invariance n'est pas très utile dans la pratique, car les événements qui font varier le champ magnétique total (par exemple, les tempêtes magnétiques causées par l'interaction de la magnétosphère avec une éjection de masse coronale) auront tendance à se produire sur des échelles de temps de l'ordre, ou inférieures, au mouvement périodique des particules autour de la Terre, donc dans des conditions non adiabatiques.

3.4 Exercices

3.4.1 Le terme $\mu \nabla B$

Dans le cours, on a admis que le terme de moyenne sur la période cyclotron

$$m = \langle \mathbf{v}_\ell \times \mathbf{r}_\ell \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{R}_g) \rangle = -\frac{\mu}{q} \nabla B. \quad (3.50)$$

Dans cet exercice, on se propose de le démontrer. Pour cela, on procède en plusieurs étapes

1. Montrez tout d'abord que

$$m = \omega_c (\langle \mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell \rangle : \nabla \mathbf{B}) \mathbf{b} - \langle \mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell \rangle \cdot \nabla B \quad (3.51)$$

Aide : (i) quel lien l'expression de la trajectoire cyclotron permet de faire entre \mathbf{r}_ℓ et \mathbf{v}_ℓ ? (ii) exprimer les produits scalaires/tensoriels en notation d'Einstein aide à trouver les formes voulues. (iii) On supposera que la direction du vecteur \mathbf{b} est constante "le temps de calculer la moyenne".

2. Exprimez le tenseur $\mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell$ sous forme de matrice dans une base cartésienne d'axe $\mathbf{z} \equiv \mathbf{b}$. Moyennez sur la gyrophase pour montrer que

$$\langle \mathbf{r}_\ell \mathbf{r}_\ell \rangle = \frac{v_\perp^2}{2\omega_c^2} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{b}) \quad (3.52)$$

3. En combinant les résultats des deux questions précédentes (ainsi qu'une équation Maxwell judicieusement choisie), montrez que $m = -\frac{\mu}{q} \nabla B$.

3.4.2 Orbite de particule sur une ligne de champ potentiel.

Nous avons étudié dans le cours l'effet de la courbure des lignes de champ magnétique. Mais les équations de Maxwell n'autorisent pas l'existence d'une courbure des lignes de champ sans gradient du module du champ associé; par conséquent, une dérive grad-B accompagne toujours une dérive de courbure. Nous cherchons dans cet exercice à calculer la dérive dans le cas d'un champ potentiel (i.e. pas de densité de courant ni de courant de déplacement dans le plasma : $\mathbf{rot} \mathbf{B} = 0$), caractérisé par un rayon de courbure R_c constant.

1. On considère une ligne de champ potentiel, de rayon de courbure R_c . Calculer le gradient perpendiculaire ∇B du champ en un point de cette ligne de champ (pour cela, il peut être pratique de se placer dans un système de coordonnées polaires).
2. Déduisez l'expression de la dérive perpendiculaire d'une particule se déplaçant le long de cette ligne de champ, faisant apparaître l'énergie cinétique totale de la particule \mathcal{E} et son énergie parallèle \mathcal{E}_{\parallel} .

Chapitre 4: Transport dans un plasma magnétisé

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux phénomènes de transport dans un plasma magnétisé. La nature du mouvement des particules dans un champ magnétique vu au chapitre précédent nous indique que celui-ci doit être modifié dans la direction perpendiculaire au champ. Cette modification doit certainement aller avec une forte diminution des coefficients de transport, puisque le mouvement perpendiculaire des particules est fortement "entravé" par la présence du champ (les particules tournent sur place...).

4.1 Mobilité et diffusion

Nous nous plaçons dans le cas "paradigmatique" d'un plasma partiellement ionisé, où les collisions entre particules chargées et atomes neutres sont dominantes. On étudie la réponse du plasma à l'application de forces extérieures constantes. On note $\nu_{i,e}$ les fréquences de collisions entre ion et neutres (indice i) ou entre électrons et neutres (indice e). Ces fréquences de collisions sont données par

$$\nu_s = n_n \sigma_c v_{th,s} \quad (4.1)$$

où n_n est la densité de neutres, σ_c la section efficace de collisions avec les neutres (du même ordre de grandeur pour les ions et les électrons) et $v_{th,s} = (kT_s/m_s)^{1/2}$ la vitesse thermique.

On considérera pour garder le problème raisonnablement simple les fréquences de collisions entre ions et électrons négligeables, que les températures sont constantes (indépendantes de la position), que le plasma est constitué d'une seule espèce atomique ou moléculaire, ionisée une seule fois. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$0 = n_s m_s \mathbf{g} - kT_s \nabla n_s + n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \wedge \mathbf{B}) - n_s m_s \nu_s (\mathbf{u}_s - \mathbf{U}) \quad (4.2)$$

où $s = i, e$. \mathbf{g} est l'accélération de la pesanteur, \mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{B} le champ magnétique et \mathbf{U} représente ici une éventuelle vitesse des neutres par rapport au référentiel d'observation. Vitesse qui peut jouer un rôle essentiel dans les phénomènes électro-dynamiques ionosphériques, qui sont souvent générés par les vents de neutres, dont les vitesses sont importantes (> 100 m/s) dans la haute atmosphère (thermosphère).

Nous avons dans cette équation négligé le terme inertiel $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ devant le terme de viscosité $\nu \mathbf{u}$. Ceci est possible pour un fluide subsonique et relativement collisionnel (faible nombre de Knudsen). On voit en effet que (en introduisant L la dimension spatiale typique du système)

$$\frac{|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\nu \mathbf{u}|} \sim \frac{u}{\nu L} \sim \frac{u/v_{th}}{L/\ell_{pm}} \sim M_a K_n \quad (4.3)$$

où M_a est le nombre de Mach et K_n le nombre de Knudsen.

De manière à simplifier et à éliminer la dépendance explicite en \mathbf{U} , on reformule l'équation de la dynamique dans le référentiel dans lequel les neutres sont au repos :

$$0 = n_s m_s \mathbf{g} - k T_s \nabla n_s + n_s q_s (\mathbf{E}' + \mathbf{u}'_s \wedge \mathbf{B}) - n_s m_s \nu_s \mathbf{u}'_s \quad (4.4)$$

où $\mathbf{u}'_s = \mathbf{u}_s - \mathbf{U}$ et $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{U} \wedge \mathbf{B}$, pour un changement de référentiel non-relativiste.

Nous pouvons exprimer la vitesse \mathbf{u}'_s :

$$\mathbf{u}'_s - \kappa_s \mathbf{u}'_s \wedge \mathbf{b} = \mu_s (m_s \mathbf{g} + q_s \mathbf{E}') - D_s \frac{\nabla n_s}{n_s} = \mathbf{w}_s \quad (4.5)$$

Où nous avons introduit les coefficients de mobilité de l'espèce s : $\mu_s = 1/(m_s \nu_s)$ et le coefficient de diffusion $D_s = k T_s / (m_s \nu_s) = k T_s \mu_s$. $\kappa_s = q_s B / (m_s \nu_s)$ est le rapport de la pulsation cyclotronique de la population s sur sa fréquence de collision avec les neutres (attention au fait que $\kappa_e < 0$ avec cette définition). \mathbf{w}_s est la vitesse qu'aurait la population s en l'absence de champ magnétique.

4.1.1 Cas limites : plasmas magnétisés et non-magnétisé

L'équation (4.5) nous permet de discuter les cas limites du champ faible $\kappa_s \ll 1$ et du champ fort $\kappa_s \gg 1$.

Dans le premier cas, $\kappa_s \ll 1$, nous voyons que $\mathbf{u}'_s \simeq \mathbf{w}_s$, tout se passe donc comme s'il n'y avait pas de champ magnétique : les particules chargées se meuvent à travers une population de neutres sur laquelle ils se cognent : effet de diffusion mis à part, leur vitesse moyenne est donc proportionnelle aux forces appliquées (loi d'Ohm ou apparenté), le travail des forces qui les fait se mouvoir étant transmis aux neutres sous forme de chaleur (effet Joule ou apparenté).

Dans le second cas, $\kappa_s \gg 1$ on a alors $\kappa_s \mathbf{u}'_s \wedge \mathbf{b} \simeq -\mathbf{w}_s$, et donc

$$\mathbf{u}'_{\perp,s} \simeq \frac{\mathbf{w}_s}{\kappa_s} \wedge \mathbf{b} \simeq \frac{1}{q_s B^2} (m_s \mathbf{g} + q_s \mathbf{E}' - k T_s \frac{\nabla n_s}{n_s}) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{V}_g + \mathbf{V}_\wedge + \mathbf{V}_{dm}. \quad (4.6)$$

où $\mathbf{u}'_{\perp,s}$ est la composante perpendiculaire de la vitesse de la population s , $\mathbf{u}'_{\perp,s} \equiv \mathbf{u}'_s - (\mathbf{u}'_s \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}$. La composante de la vitesse parallèle au champ magnétique, évidemment, est solution de l'équation "sans champ magnétique" discutée précédemment.

Les collisions agissant très lentement devant la fréquence cyclotronique, on retrouve les mouvements de dérive magnétiques, perpendiculaires à la fois à la force appliquée et au champ magnétique. Les trois termes du membre de droite sont, par ordre d'apparition : la vitesse de dérive gravitationnelle, la vitesse de dérive en champs croisés et la vitesse de dérive diamagnétique.

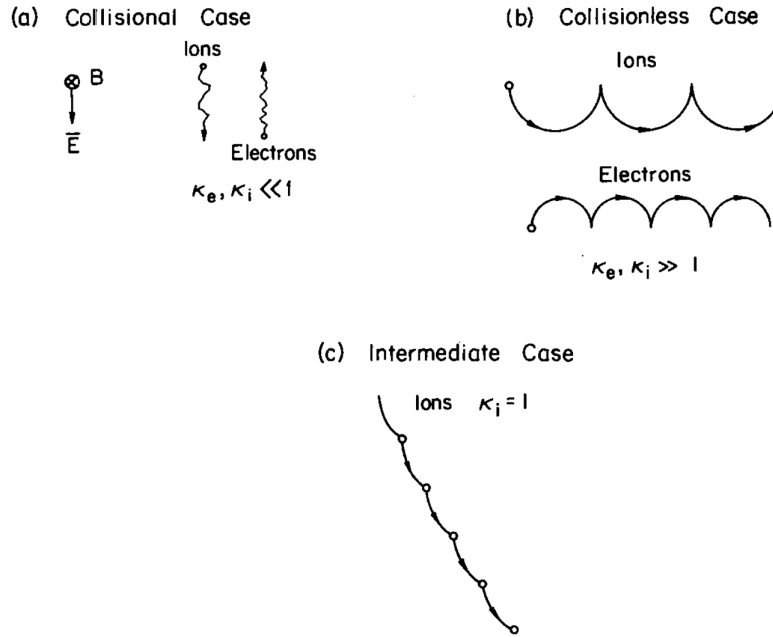


FIGURE 4.1 – Trajectoires schématiques de particules pour les cas limites $\kappa \ll 1$, $\kappa \gg 1$, $\kappa \sim 1$. Seule la force électrique est prise en compte dans cette figure.

4.1.2 Coefficients Pedersen et Hall

Que se passe-t-il dans un cas intermédiaire ? On peut imaginer que la vitesse des particules aura alors deux composantes : une composante "Ohmique" parallèle aux forces appliquées et une composante "dérive magnétique" perpendiculaire à la fois à ces forces et au champ magnétique.

Pour répondre à cette question, on peut résoudre l'équation (4.5), par exemple en la reformulant sous la forme d'un système algébrique (on omet temporairement les indices s) :

$$\begin{cases} u'_x - \kappa u'_y = w_x \\ \kappa u'_x + u'_y = w_y \\ u'_z = w_z \end{cases} \quad (4.7)$$

Où l'on a pris l'axe z de notre repère parallèle au champ magnétique. Le système s'écrit sous forme matricielle $\mathbf{w} = A \cdot \mathbf{u}'$, et se résout en inversant la matrice A :

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\kappa^2} & \frac{\kappa}{1+\kappa^2} & 0 \\ -\frac{\kappa}{1+\kappa^2} & \frac{1}{1+\kappa^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

On voit donc que les coefficients de mobilité et de diffusion prennent des valeurs différentes selon la direction considérée. Dans la direction du champ magnétique, ils ne sont pas modifiés, et on a

$$u'_{sz} = \mu_s(m_s g_z + q_s E'_z) - \frac{D_s}{n_s} \frac{dn_s}{dz} \quad (4.9)$$

Dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, il faut séparer la direction des forces (ou du gradient de densité), le long desquelles on a une mobilité (ou un coefficient de diffusion) dite *Pedersen*¹

$$\mu_{Ps} = \frac{\mu_s}{1 + \kappa_s^2} \quad D_{Ps} = kT_s \mu_{Ps} = \frac{D_s}{1 + \kappa_s^2} \quad (4.10)$$

de la direction à la fois perpendiculaire à celle des forces et du champ magnétique, le long de laquelle on a une mobilité ou un coefficient de diffusion effectif dit *Hall*

$$\mu_{Hs} = \frac{\kappa_s \mu_s}{1 + \kappa_s^2} \quad D_{Hs} = kT_s \mu_{Hs} = \frac{\kappa_s D_s}{1 + \kappa_s^2}. \quad (4.11)$$

4.1.3 Tenseur de conductivité

Nous avons traité le cas général des mobilités dans la section précédente, mais il est intéressant de regarder le cas particulier du champ électrique, qui est souvent le terme dominant.

La conductivité σ du plasma est définie par $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$, où $\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e)$, si on considère que l'espèce ionique est simplement ionisée. Pour simplifier les expressions, on suppose dans la suite que le plasma est quasi-neutre, donc que $n_e = n_i = n$. La matrice de conductivité s'exprime donc simplement à partir de celle de mobilité (4.8),

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_P & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_P & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

où les éléments de matrice sont donnés par (attention au signe – dans la définition de

1. Ionosphéricien Danois

σ_H , qu'on a introduit pour que la conductivité soit positive, cf ci-dessous).

$$\begin{cases} \sigma_0 = ne^2(\mu_i + \mu_e) \\ \sigma_P = ne^2 \left(\frac{\mu_i}{1+\kappa_i^2} + \frac{\mu_e}{1+\kappa_e^2} \right) \\ \sigma_H = -ne^2 \left(\frac{\kappa_i \mu_i}{1+\kappa_i^2} + \frac{\kappa_e \mu_e}{1+\kappa_e^2} \right) \end{cases} \quad (4.13)$$

où encore, en explicitant les masses et charges des particules :

$$\begin{cases} \sigma_0 = \frac{ne^2}{m_i \nu_i} + \frac{ne^2}{m_e \nu_e} \\ \sigma_P = \frac{ne^2}{m_i \nu_i} \frac{1}{1+\kappa_i^2} + \frac{ne^2}{m_e \nu_e} \frac{1}{1+\kappa_e^2} \\ \sigma_H = \frac{ne}{B} \left(\frac{\kappa_e^2}{1+\kappa_e^2} - \frac{\kappa_i^2}{1+\kappa_i^2} \right) \end{cases} \quad (4.14)$$

L'expression de σ_0 de la conductivité dans la direction parallèle au champ magnétique est identique à celle qu'on aurait dans un plasma non-magnétisée. Elle est dominée par le terme électronique, puisque, en utilisant (4.1), le rapport de termes electrons/ions vaut $m_i \nu_i / m_e \nu_e = (m_i / m_e)^{1/2} (T_i / T_e)^{1/2} \sim 40$. On a donc avec une bonne précision $\sigma_0 \simeq \frac{ne^2}{m_e \nu_e}$.

Les valeurs des termes Pedersen et Hall dépendent du rapport κ de la gyrofréquence sur la fréquence de collision, qui est dans l'ionosphère fonction de l'altitude, essentiellement en raison de la variation de la densité de neutres avec l'altitude (et donc la diminution de ν) comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

4.1.4 Ordre de grandeurs des mobilités et conductivités dans une atmosphère isotherme

Cette théorie du transport a historiquement été dérivée dans le cadre des études ionosphériques. Si on considère une atmosphère isotherme, la densité de neutre décroît avec l'altitude suivant une loi exponentielle caractérisée par une échelle de hauteur $H = kT/mg$.

Pour obtenir les valeurs des mobilités et des conductivités il faut aussi un modèle de champ magnétique : le champ terrestre est globalement dipolaire, $B(r) = B_T(r/R_T)^3$ où $B_T \simeq 0.5$ G ($1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$). Pour des altitudes faibles ($z - R_T \ll R_T$), on a donc $B(z) \simeq B_T(1 - 3z/R_T)$. On voit donc que si l'on considère une couche d'atmosphère de quelques centaines de kilomètres, on peut sans trop se tromper considérer le champ comme constant (l'erreur relative commise sur B étant de l'ordre de $3\Delta z/R_T \sim 10\%$ pour $\Delta z = 200$ km). On fera donc l'hypothèse d'un champ constant $B = 0.5$ G, ce qui ne modifie pas qualitativement les résultats et évite d'ajouter trop d'ingrédients dans le modèle.

La fig.4.2 présente l'évolution des trois composantes de la mobilité pour les électrons. On voit que la mobilité parallèle $\mu_{e,0}$ augmente exponentiellement avec l'altitude, puisque

la fréquence de collision électron-neutre est inversement proportionnelle à la densité de neutres $\nu_e \propto 1/n$, et que $n \propto \exp(-z/H)$.

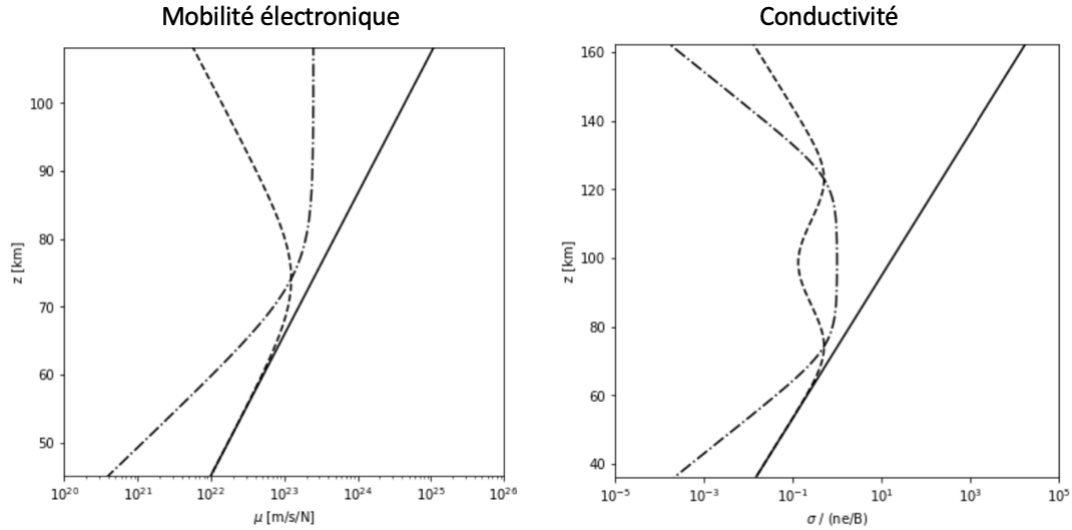


FIGURE 4.2 – Variation avec l'altitude des mobilités électroniques μ_e (-), $\mu_{e,P}$ (- -) et $\mu_{e,H}$ (-.-) (figure de gauche) et des conductivités σ (-), σ_P (- -) et σ_H (-.-) normalisées par ne/B (figure de droite) dans une atmosphère isotherme de N_2 à 300 K (cf. texte pour les paramètres).

La mobilité Pedersen $\mu_{e,P}$ est initialement confondue avec $\mu_{e,0}$ puisqu'on a pour les basses couches de l'atmosphère $\kappa_e \ll 1$: le plasma est très collisionnel et le champ magnétique n'a pas d'effet sur la mobilité. Puis à l'altitude où la gyro-fréquence est de l'ordre de la fréquence de collision (environ 70 km pour les électrons, environ 120 km pour les ions), les deux courbes se séparent, la conductivité perpendiculaire au champ B diminue alors que κ_e augmente.

La mobilité Hall $\mu_{e,H}$ (dont on rappelle qu'elle est proportionnelle à $\kappa/(\kappa^2 + 1)$) est faible à basse altitude, et augmente avec l'altitude, jusqu'à devenir le terme perpendiculaire dominant aux hautes altitudes, lorsque les collisions deviennent peu fréquentes ($\kappa \gg 1$) et que le mouvement des électrons est concrètement assimilable à leur dérive magnétique (la mobilité μ devient alors constante puisque la vitesse des particules est $\mathbf{w} = \mathbf{F} \wedge \mathbf{B}/B^2$, qui est indépendante de l'altitude dans notre modèle puisque le module de \mathbf{B} est considéré comme constant).

La fig.4.2 présente aussi l'évolution avec l'altitude de la conductivité (normalisée par en/B). Comme on l'a vu la conductivité parallèle est dominée par la mobilité des électrons, bien plus importante que celles des ions. Elle est donc à peu près égale à $ne^2/m_e\nu_e$ et augmente exponentiellement avec l'altitude.

La conductivité Pedersen (dans la direction parallèle à \mathbf{E} et perpendiculaire à \mathbf{B}) présente deux maxima. Un premier vers 70 km, lié au maximum de $\mu_{e,P}$: à cette altitude le courant est porté par les électrons (pour lesquels $\kappa_e \sim 1$), tandis que les ions sont encore

très collisionnels ($\kappa_i \ll 1$). Et un second maximum autour de 130 km d'altitude lié au maximum de $\mu_{i,P}$, pour lequel le courant est essentiellement porté par les ions ($\kappa_i \sim 1$) tandis que les électrons sont très magnétisés ($\kappa_e \gg 1$) et se déplacent essentiellement via leur mouvement de dérive en champs croisés dans la direction perpendiculaire à \mathbf{E} .

La conductivité Hall, faible à basse altitude (le plasma n'est pas magnétisé, $\kappa_e \ll 1$ et $\kappa_i \ll 1$). Elle devient dominante entre 80 et 120 km d'altitude, dans la zone où les électrons sont magnétisés ($\kappa_e \gg 1$) tandis que les ions ne le sont pas ($\kappa_i \ll 1$) : les électrons se déplacent avec leur mouvement de dérive ce qui n'est pas le cas des ions, collisionnels, d'où l'existence d'un courant net dans la direction perpendiculaire à la fois à \mathbf{E} et à \mathbf{B} .

A haute altitude, les populations ioniques et électroniques sont toutes deux peu collisionnelles ($\kappa_e \gg 1$ et $\kappa_i \gg 1$). Les deux populations se déplacent donc suivant leur dérive en champs croisés, dont la vitesse est indépendante de la charge et de la masse. Les deux populations sont donc animées du même mouvement, et le courant, résultant de la différence de vitesses entre électrons et ions, tend donc vers zéro quand l'altitude augmente.

Pour conclure cette partie, il est intéressant de noter que la conductivité perpendiculaire au champ magnétique prend des valeurs non-négligeables dans une couche de quelques dizaines de kilomètres d'épaisseur (autour de la région E ionosphérique). L'altitude de cette couche est déterminée par la zone où la fréquence de collision entre particules chargées et neutres est de l'ordre de la gyrofréquence des électrons ou des ions. Le fait que cette altitude corresponde précisément à l'altitude de la couche d'ionisation (couche de Chapman), donc à l'altitude où il existe des particules chargées en nombre important pour porter le courant, est une coïncidence liée au hasard (la valeur de l'amplitude du champ magnétique terrestre, qui détermine la fréquence cyclotron, n'a a priori aucune raison d'être corrélée aux paramètres qui déterminent la fréquence de collisions et l'altitude de la couche de Chapman, i.e. la densité de l'atmosphère terrestre et l'irradiance solaire). Cette coïncidence, à l'origine de multiples phénomènes électrodynamiques dans l'ionosphère (sur lequel on reviendra plus bas), ne se retrouvera donc pas nécessairement dans l'étude d'autres ionosphères planétaires, ni même dans l'étude de l'ionosphère terrestre à d'autres époques que la notre (le champ magnétique terrestre et l'irradiance solaire variant significativement sur des échelles de temps longues).

4.2 Quelques effets du transport ionosphérique

4.2.1 Electrodynamique des basses latitudes : effet dynamo, système de courants Sq et électro-jet équatorial

L'effet de dynamo atmosphérique a été proposé dès 1882 par Balfour Stewart, physicien écossais qui s'intéressait au magnétisme terrestre et avait remarqué d'importantes variations journalières de la composante horizontale du champ géo-magnétique, avec des périodes égales à des fractions de 24h (jour solaire) et 24,8 h (jour lunaire). La théorie (simplifiée) présentée ici a été développée bien plus tard, dans les années 1960.

L'effet dynamo procède des étapes suivantes :

- De forts vents atmosphériques, essentiellement dans la direction Ouest \rightarrow Est sont générés dans la thermosphère (~ 100 km d'altitude) par les effets de marées lunaires et solaires, ainsi que des effets thermiques liés à la différence de température jour/nuit.
- Ces vents entraînent avec eux, par effet de viscosité (collisions), les particules chargées de l'ionosphère, les forçant à se déplacer perpendiculairement au champ magnétique terrestre. Ils entraînent plus facilement les ions (fortement couplés collisionnellement aux neutres à cette altitude, $\kappa_i \ll 1$) que les électrons (très magnétisés à cette altitude, $\kappa_e \gg 1$).
- Il en résulte un courant électrique perpendiculaire au champ \mathbf{B} et à la vitesse du vent \mathbf{U} donc essentiellement vertical. Or la dimension verticale de la couche conductrice est finie (cf. fig.4.2) : le courant ne peut pas se déplacer librement, et des charges électriques vont s'accumuler aux frontières de la couche de conduction.
- La polarisation de la couche de conduction crée un champ électrique potentiel qui va à son tour modifier la distribution de courant, de manière à ce que la divergence de la distribution de courant soit nulle et qu'un équilibre stationnaire puisse s'établir.

Les équations de transport que nous avons dérivées à la section précédente nous permettent de modéliser ces effets. Nous considérons qu'il existe un mouvement des neutres par rapport à la surface terrestre, avec une vitesse \mathbf{U} . L'expression de la densité de courant est donnée par

$$\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}' = \sigma \cdot (\mathbf{U} \wedge \mathbf{B} - \nabla\Phi) \quad (4.15)$$

où $\mathbf{U} \wedge \mathbf{B}$ est le champ électromoteur et $\nabla\Phi$ le champ électrique dû à la présence de charges de polarisation. σ est la matrice de conductivité que nous avons dérivé dans la section précédente.

Nous cherchons à décrire le système de courant ionosphérique qui s'établit en état stationnaire. La conservation de la charge s'écrit $\partial_t \rho + \text{div } \mathbf{j} = 0$, ce qui implique que la divergence du courant doit être nulle dans un tel équilibre,

$$\text{div } [\sigma \cdot (\mathbf{U} \wedge \mathbf{B} - \nabla\Phi)] = 0 \quad (4.16)$$

On voit que le champ de courant reflètera la forme (en général complexe) du champ de vitesse du vent qui en est la source, ainsi que la structure de la conductivité via σ , et les variations temporelles (jour/nuit pour σ , liés aux effets de marées pour \mathbf{U}) de ces paramètres. On a donc affaire à une structure assez complexe, qu'on désigne sous le nom de *système de courant Sq*. Le Sq réfère à *Solar quiet*, dans la mesure où ce système de courant est celui qui s'établit en l'absence d'activité magnétique intense d'origine solaire.

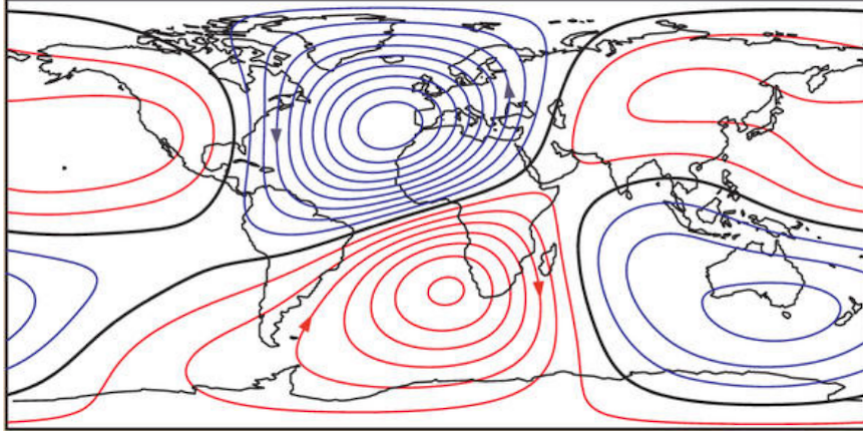


FIGURE 4.3 – Système de courant Sq : lignes de courants ionosphériques dérivées de données prise à l’observatoire d’Huancayo au Pérou. Incréments de 10 kA entre deux lignes successives. Les lignes bleues tournent dans le sens anti-horaire et les lignes rouges dans le sens horaire. La zone de très forts courants Ouest → Est au niveau de l’équateur diurne est l’*électrojet équatorial*.

Nous considérons, pour simplifier le problème (et parce que c’est l’endroit où la dynamo est la plus efficace), des zones proches de l’équateur terrestre. On choisit un repère (x, y, z) tel que x pointe vers le haut, y vers l’Est et z vers le Nord. Dans ce repère, on a $\mathbf{U} = U \cdot \mathbf{u}_y$ et $\mathbf{B} = B \cdot \mathbf{u}_z$. Nous considérons une géométrie en tranche, dans laquelle la conductivité est non-nulle uniquement dans une tranche d’altitudes. La fig.?? présente la géométrie du problème.

Le courant dans la direction x vaut, d’après (4.15),

$$j_x = \sigma_P E'_x - \sigma_H E'_y = \sigma_P \left(UB - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \sigma_H \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (4.17)$$

puisque en régime stationnaire il ne peut y avoir de courant net dans cette direction. Cette relation permet de relier le champ électrique *zonal* (i.e. dans la direction Ouest-Est) au champ vertical

$$E'_x = UB - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\sigma_H}{\sigma_P} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (4.18)$$

Cette expression nous permet d’obtenir celle du courant zonal, puisque nous savons que

$$j_y = \sigma_H E'_x + \sigma_P E'_y = -\sigma_P \left(1 + \frac{\sigma_H^2}{\sigma_P^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (4.19)$$

où $\sigma_C = \sigma_P (1 + \sigma_H^2 / \sigma_P^2)$ est appelée la conductivité de Cowling. On voit que l’effet de l’accumulation de charges aux frontières de la zone conductrice (traduite par l’hypothèse $j_x = 0$) a pour effet d’augmenter la conductivité dans la direction zonale d’un facteur

$(1 + \sigma_H^2 / \sigma_P^2) \sim 100$ dans la couche E. Cette augmentation de la conductivité est à l'origine du fort courant ionosphérique appelé l'électrojet équatorial (cf. fig.4.3).

Le système de courant Sq, et en particulier le fort électro-jet équatorial, est à l'origine des perturbations journalières du champ magnétique comme l'avait supposé Balfourt Stewart. Ces variations sont illustrées sur la figure 4.4.

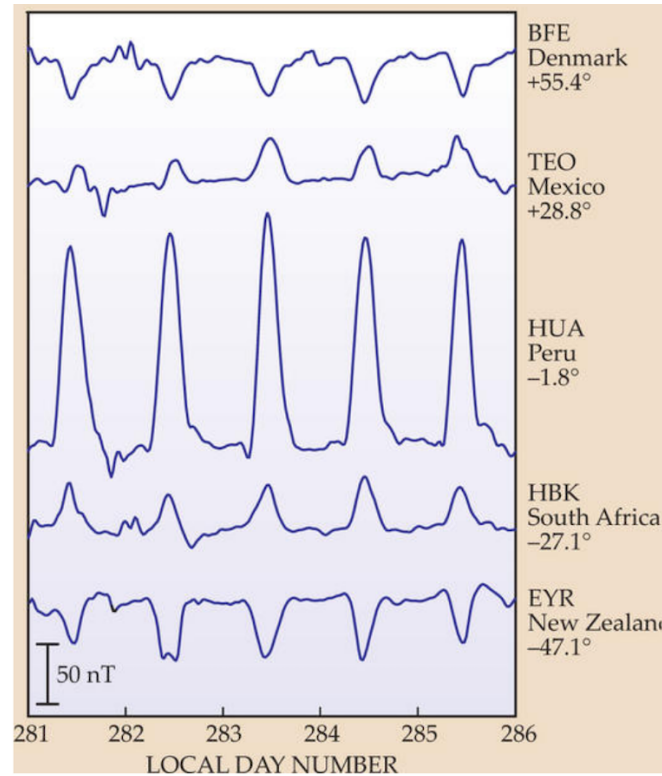


FIGURE 4.4 – Perturbations du champ magnétique terrestre mesurées par cinq observatoires situés à différentes latitudes magnétiques entre le 8 et le 12 octobre 2003. On peut noter l'inversion de polarité entre les basses et les hautes latitudes.

4.2.2 Electrodynamicisme des hautes latitudes : couplages au vent solaire et à la magnétosphère

Aux hautes latitudes les lignes de champs géo-magnétiques sont (en première approximation) verticales. Elles s'étendent à de très hautes altitudes et connectent l'ionosphère à la magnétosphère ou directement au milieu interplanétaire. Il résulte de cette connexion un certain nombre d'effets spécifiques, et en particulier un système de courants ionosphériques généré par les champs électromoteurs du vent solaire et de la magnétosphère, et donc différent du système Sq observé aux basses et moyennes latitudes.

On sépare l'ionosphère des hautes latitudes en deux régions. La région I est celle de

plus haute latitude magnétique, aussi appelée *cornet polaire*, dans lesquelles les lignes de champ magnétique terrestre sont directement connectées au vent solaire. La région II est celle de plus basses latitudes, dans lesquelles les lignes de champ magnétique connectent l'ionosphère à la magnétosphère interne. Nous verrons que les courants ionosphériques circulent dans des directions opposées dans ces deux régions (et s'annulent donc à la frontière entre ces deux régions).

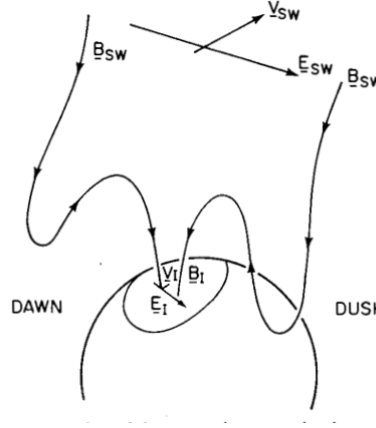


FIGURE 4.5 – Illustration de la connexion magnétique vent solaire - ionosphère (région I), pour un champ magnétique interplanétaire pointant vers le Sud.

La fig.4.5 illustre la connexion dans la région I, entre le vent solaire et l'ionosphère. Les lignes de champ magnétique, de très grande conductivité, peuvent être considérées comme iso-potentielles, elles vont donc projeter le champ électrique interplanétaire sur la surface ionosphérique. Ce système peut-être conçu comme un circuit électrique dans lequel le champ d'induction du vent solaire joue le rôle de générateur, les lignes de champ magnétiques celui de câbles électriques et l'ionosphère celui d'une résistance.

On peut chercher à évaluer la puissance (par unité de volume) injectée dans ce circuit. Celle-ci est égale à $\mathcal{P} = -\mathbf{J}_{sw} \cdot \mathbf{E}_{sw}$. Le courant \mathbf{J}_{sw} circulant dans le circuit est relié à la dynamique du plasma du vent solaire par

$$\rho \frac{d\mathbf{U}_{sw}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J}_{sw} \wedge \mathbf{B}. \quad (4.20)$$

où $\rho \simeq n_{sw} m_p$ est la masse volumique du vent solaire. On obtient le courant $\mathbf{J}_{\perp,sw}$ circulant entre deux lignes de champs en prenant le produit vectoriel de cette équation par \mathbf{B} et en divisant par B^2 ,

$$\mathbf{J}_{\perp,sw} = \frac{1}{B^2} \left(\rho \mathbf{B} \wedge \frac{d\mathbf{U}_{sw}}{dt} + \mathbf{B} \wedge \nabla p \right) \quad (4.21)$$

De plus le plasma du vent solaire étant parfaitement conducteur, on a $\mathbf{E}_{sw} + \mathbf{U}_{sw} \wedge \mathbf{B} = 0$. En utilisant l'identité $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (dit de Binet-Cauchy),

on peut exprimer plus facilement \mathcal{P} , et obtenir

$$\mathcal{P} \sim -\rho \mathbf{U}_{sw} \cdot \frac{d\mathbf{U}_{sw}}{dt} \quad (4.22)$$

dans le cas extrêmement simplifié où on a négligé l'effet du gradient de pression et considéré que \mathbf{B} et \mathbf{U}_{sw} étaient perpendiculaires ou presque. On voit que c'est la variation d'énergie cinétique du vent solaire qui est la source de l'énergie électrique du système : le fonctionnement est celui d'un générateur MHD connecté au système ionosphérique, qui joue le rôle de charge passive.

La puissance électrique fournie par le vent solaire est transmise le long des lignes de champ jusqu'à l'ionosphère où elle circule et forme un système de courants $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_{iono}$, constitué de deux composantes : une composante Pedersen alignée avec le champ électrique ionosphérique \mathbf{E}_{iono} (courants méridionaux), et une composante Hall circulant perpendiculairement à \mathbf{E}_{iono} et à \mathbf{B} (courants zonaux). On peut voir (cf. fig.4.5) que le champ \mathbf{E}_{iono} est dirigé, tout comme \mathbf{E}_{sw} , du matin vers le soir. On peut voir aussi qu'il sera plus intense que le champ interplanétaire, puisque les lignes de champs magnétiques (iso-potentielles) convergent en se rapprochant de la Terre. Le facteur entre \mathbf{E}_{iono} et \mathbf{E}_{sw} dépend de la géométrie précise des lignes de champ (facteur ~ 50).

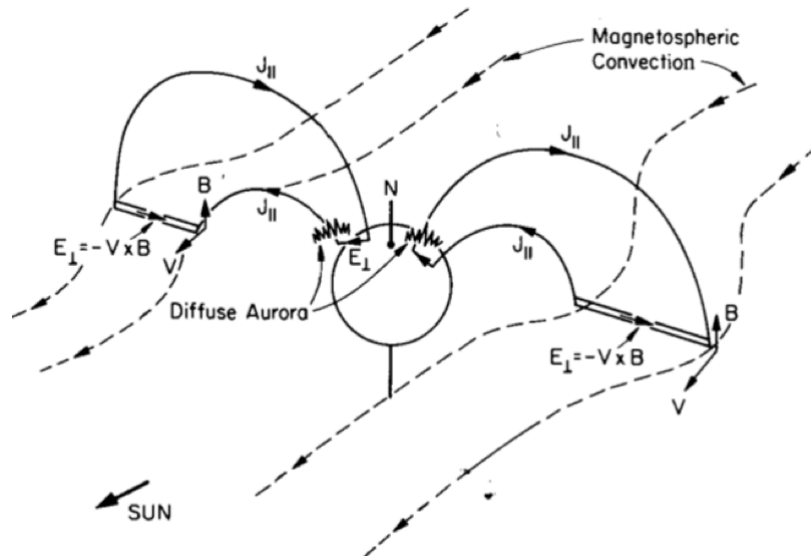


FIGURE 4.6 – Représentation schématique du couplage magnétique et électrique entre magnétosphère et ionosphère (région II)

La figure 4.6 présente la géométrie du couplage entre ionosphère et magnétosphère interne. Le fonctionnement de ce couplage est similaire à celui présenté au-dessus dans le cas du vent solaire, sauf que ce sont les mouvements de convection du plasma magnéto-

sphérique qui sont à l'origine de la génération du courant. Tout comme précédemment, l'ionosphère joue essentiellement le rôle de charge passive recevant ce courant.

Les mouvements de convection magnétosphériques étant dirigés de la queue de la magnétosphère vers le soleil, donc dans la direction inverse du mouvement de convection du vent solaire, le champ électrique projeté sur l'ionosphère sera orienté du soir vers le matin (cf. figure), et le courant ionosphérique résultant circulera dans le sens inverse de celui du cornet polaire directement connecté au vent solaire. Le système de courant produit sera là encore séparé entre des composantes Pedersen et Hall (circulant dans les directions méridionales et zonales respectivement), mais le sens de circulation est inversé par rapport aux courants de la région I.

Les courants alignés avec le champ magnétique, en pénétrant dans l'atmosphère vont être à l'origine de l'excitation d'atomes ou de molécules (collision électrons-neutres dont on a vu qu'elle était à l'origine des effets de conductivité ionosphérique), qui en se déséxcitant émettent un rayonnement responsable du phénomène d'aurores boréales diffuses et continues. Ces courants sont appelés *courants de Birkeland*, en l'honneur du physicien norvégien Kristian Birkeland qui, observant la perturbation des boussoles lors d'intenses aurores boréales, avait supposé leur existence. En période de calme solaire, les courants de Birkeland transportent environ 10^5 A. Lors d'orages magnétiques d'origine solaire leur intensité peut atteindre plusieurs millions d'ampères.

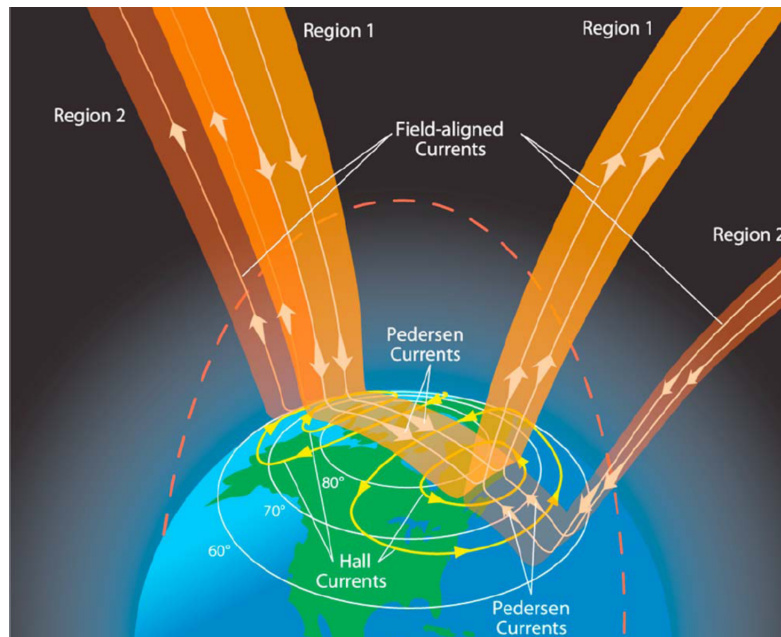


FIGURE 4.7 – Vision globale du système de courants ionosphériques aux hautes latitudes.

La fig.4.7 présente une vision globale du système de courants ionosphériques aux

hautes latitudes. On peut y voir les courants de Birkeland (alignés avec \mathbf{B} et assurant la connexion avec les hautes altitudes), les courants Pedersen et Hall et l'inversion du sens de ceux-ci lors du passage de la région I (cornet polaire connecté au vent solaire) à la région II (connectée à la magnétosphère interne).

4.3 Bibliographie

- *Introduction to Ionospheric Physics*, Henry Rishbeth, Owen K. Garriott, Academic Press, 1969
- *The Earth's Ionosphere, Plasma Physics and Electrodynamics*. Michael C. Kelley, International Geophysics Series, Vol. 43, 1996
- *The ionospheric E-layer and F-layer dynamos - a tutorial review*. Henry Rishbeth, Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, Vol. 59, 1997