

Introduction à la Physique des Plasmas

Master de Physique à distance

Laurence Rezeau, Caterina Riconda et Arnaud Zaslavsky

Sommaire

Introduction 5

Chapitre 1. Qu'est-ce qu'un plasma ? 7

1. Dans quelles conditions la matière est-elle à l'état plasma ? 7
2. Les effets qui dominent la physique 10
3. Le système couplé champs / particules : cas général 13
4. Un cas particulier : l'oscillation de plasma 14
5. La fréquence plasma 17
6. Effets de la température 18
7. Quelques exemples d'application de la physique des plasmas 20

Chapitre 2. Trajectoires individuelles dans un champ électromagnétique 25

1. Trajectoire d'une particule dans un champ magnétique uniforme et stationnaire 25
2. Champs lentement variables 28
3. Petites perturbations d'un mouvement périodique 35

Appendice A. « Vitesse » du champ magnétique 38

Appendice B : La force miroir 39

Appendice C. Mouvements de particules dans la magnétosphère 40

Chapitre 3. Théorie cinétique des plasmas 43

1. Fonction de distribution d'un plasma 43
2. Equations cinétiques 46

Chapitre 4. Modélisation fluide des plasmas et limite MHD 49

1. Définition des grandeurs fluides 49
2. Equations d'évolution des grandeurs fluides 51
3. Equations de fermeture 53
4. Description multi-fluides du plasma 56
5. Description MHD (Magnétohydrodynamique) 59

Appendice A. Equations de transport sous forme conservative 64

Appendice B. Champ gelé et reconnexion 65

Chapitre 5. Ondes dans les plasmas dans l'approximation fluide 67

1. Calcul des modes propres de propagation : méthode classique 67
2. Le traitement fluide de l'onde de plasma 68
3. Autres modes de propagation « électroniques » 71

4. Système à deux fluides. Modes de propagation basse fréquence.	75
5. Excitation des ondes dans un plasma	79
Appendice A. Le diagramme CMA	83
Chapitre 6. Effets cinétiques. Amortissement Landau.	85
1. Recherche des solutions « ondes » du système Vlasov/ Maxwell	85
2. Particules résonnantes	87
3. Calcul des modes propres cinétiques	93
Appendice A. Transformée de Laplace pour le calcul des modes cinétiques	98
Appendice B : Méthode de Landau-Laplace de recherche des modes propres.	100
Chapitre 7 Ondes de choc et discontinuités	106
1. Quelques exemples de chocs et de discontinuités	106
2. Existence des discontinuités*	108
3. Etablissement des équations de saut *	110
4. Différents types de discontinuités pouvant exister dans un plasma *	113
Index	119

INTRODUCTION

On peut dire que l'état « plasma » constitue le « quatrième état de la matière ». S'il est moins connu que les trois autres (solide, liquide et gaz), c'est parce qu'il est moins présent qu'eux dans notre environnement immédiat. Pourtant, il faut savoir que la matière neutre, qui forme la plus grande partie de cet environnement, constitue une exception dans l'univers. Dans la plus grande partie de celui-ci, la matière est constituée, soit totalement, soit partiellement, de particules chargées (électrons et protons en particulier) qui sont libres et non pas liées au sein d'atomes et de molécules neutres ; ce sont ces gaz de particules chargées qu'on appelle des "plasmas". Leur principale propriété, qui les distingue des gaz neutres, est qu'ils interagissent de façon étroite avec le champ électromagnétique, d'une part parce que le mouvement des particules est régi par les champs, d'autre part parce que l'ensemble des particules est lui-même source de champs par la densité de charge et les courants que ces mouvements entraînent.

La physique des plasmas se situe donc à l'intersection entre la physique statistique et l'électromagnétisme.

- *Pour les plasmas naturels, elle trouve ses terrains d'application les plus développés en géophysique externe (ionosphère / magnétosphère de la Terre et des autres planètes, cf. aurores boréales), en physique solaire et stellaire (cf. couronne, vent solaire, ...) et en astrophysique (cf. jets galactiques...).*
- *Pour les plasmas de laboratoire, elle joue un rôle très important dans les études concernant la fusion nucléaire, que ce soit par confinement magnétique (tokamaks) ou par confinement inertiel (fusion laser).*
- *Des gaz partiellement ionisés constituent également l'état de la matière qu'on rencontre dans les décharges (foudre, tubes à néon...) ou dans les flammes ainsi que dans de nombreuses applications technologiques (traitement de surface, dépôt, gravure,...).*

Le but de ce cours est de donner aux étudiants quelques notions sur les phénomènes de la physique des plasmas et leurs traitements théoriques, mais également d'apporter quelques informations sur les applications.

Certaines parties du cours sont marquées par un *, elles sont optionnelles et ne feront pas l'objet de l'examen.

Les auteurs remercient pour leur aide François Amiranoff, Gérard Belmont, Carine Briand, Andrea Ciardi, Mickael Grech et Tommaso Vinci.

CHAPITRE 1. QU'EST-CE QU'UN PLASMA ?

Un plasma ressemble à première vue à un gaz, mais le fait que les particules de ce gaz soient ionisées change en fait radicalement la physique qui gouverne la dynamique de ces particules. D'une part les particules chargées ont un mouvement qui est déterminé par les champs électromagnétiques, et d'autre part les champs sont créés par les densités de charge et de courant dus à ces particules. Ce couplage sera illustré sur un exemple simple, nommé « oscillation de plasma ». On verra sur cet exemple fondamental comment toute fluctuation de champ est accompagnée d'un mouvement de matière et réciproquement comment tout mouvement de matière est accompagné d'une fluctuation de champ.

1. DANS QUELLES CONDITIONS LA MATIÈRE EST-ELLE À L'ÉTAT PLASMA ?

Le terme "plasma" a été introduit pour la première fois par I. Langmuir en 1928 lorsqu'il observait le comportement du gaz ionisé dans des tubes à décharge. Les oscillations de l'ensemble des ions observées dans ces tubes faisaient penser aux oscillations que l'on peut voir dans un milieu gélatineux (plasma veut dire matière gélatineuse ou qui peut être modelé en grec). Le plasma apparaît alors comme un "quatrième" état de la matière, un milieu gazeux et ionisé où la dynamique des particules est dominée par les forces électromagnétiques : les autres forces présentes comme la gravité, sont souvent négligeables dans ce genre de système.

Le développement de la physique des plasmas s'est fait à la suite de ces premières découvertes, mais aussi à partir des recherches sur les radiocommunications. Dès 1901, G. Marconi avait observé la réflexion des ondes sur ce qu'il pensait être l'atmosphère mais qui était en fait l'ionosphère. L'idée que notre atmosphère est ionisée à partir d'une certaine altitude a été émise par Appleton en 1925, il a lancé ainsi l'étude des plasmas naturels qui est devenue progressivement celle des plasmas astrophysiques. En laboratoire, les études se sont poursuivies au-delà des décharges, en particulier avec les recherches sur les faisceaux d'électrons comme sources de rayonnement cohérent (klystrons), mais elles sont passées à un stade beaucoup plus intensif avec le début des recherches sur la fusion nucléaire contrôlée, vers 1955. Plus récemment des travaux ont été entrepris pour étudier les interactions entre plasma et surfaces, pour aboutir à des traitements de surfaces en mécanique ou en micro-électronique grâce aux plasmas. On a aussi montré que les plasmas créés par laser peuvent se comporter comme des sources de particules rapides ou de rayonnement, c'est-à-dire comme des accélérateurs en miniature, qui présentent une alternative aux accélérateurs traditionnels. Les recherches sur les plasmas sont donc très actives aussi bien dans les domaines de l'astrophysique, de la fusion que des applications industrielles.

Dans les conditions de température et de pression que nous appelons normales parce que ce sont celles dans lesquelles nous vivons, les atomes se trouvent sous forme neutre, atomique ou moléculaire. Dans le reste de l'Univers pourtant, ce "quatrième" état de la matière est l'état normal. Pour créer un plasma à partir d'un gaz neutre, il faut fournir de l'énergie pour arracher un ou plusieurs électrons à chaque atome. Il faut donc qu'une énergie suffisante soit fournie aux atomes pour qu'ils soient partiellement, ou même totalement, ionisés. Cette énergie peut être fournie de plusieurs façons.

a) Les décharges électriques

Comme l'a montré I. Langmuir le premier, en réalisant une décharge électrique dans un gaz on l'ionise partiellement et on crée un plasma. Ces plasmas sont donc présents dans notre environnement familier aussi bien dans les enseignes au néon que dans les éclairs d'orages.

b) Le chauffage

Dans la nature, l'effet qui permet l'ionisation est très souvent simplement la température. Pour un ensemble d'atomes maintenus en équilibre thermodynamique local par les collisions, lorsque l'énergie cinétique moyenne des atomes (de l'ordre de kT) devient de l'ordre de l'énergie d'ionisation de l'atome ($\approx eV$), la fraction d'atomes ionisés devient significative. Les énergies d'ionisation étant élevées, il faut des températures élevées pour avoir l'ionisation totale. Dans la couronne solaire, par exemple, on observe par la spectroscopie des atomes de Fer ionisés 12 fois, or cet état est la variété de fer prédominante si la température est de l'ordre de 10^6 K. On déduit donc de cette observation à la fois un ordre de grandeur de la température de la couronne solaire et la confirmation du fait que le milieu y est bien constitué de plasma.



Figure 1. Exemple de plasma visible à l'intérieur de la lampe. (OSRAM Sylvania)

Remarque : souvent en physique de plasma on indique la température par l'énergie qui lui est associée, en eV, le facteur de conversion est $1 \text{ eV} = 11605 \text{ K} \approx 10^4 \text{ K}$.

c) L'absorption de rayonnement

Une troisième manière d'ioniser les atomes peut être l'absorption de rayonnement. L'absorption d'un photon par un atome peut produire un ion et un électron. Si la recombinaison est suffisamment lente, un plasma se forme. Un exemple de plasma créé de cette façon à basse température est celui de l'ionosphère de la Terre ou des planètes qui ont une atmosphère. Le rayonnement ultra-violet solaire est absorbé par les hautes couches de l'atmosphère et ionise les atomes et molécules qui la constituent. L'ionosphère terrestre présente un maximum de densité vers 300 km. Il est plus fort le jour, lorsque l'atmosphère est éclairée par le Soleil, que la nuit.

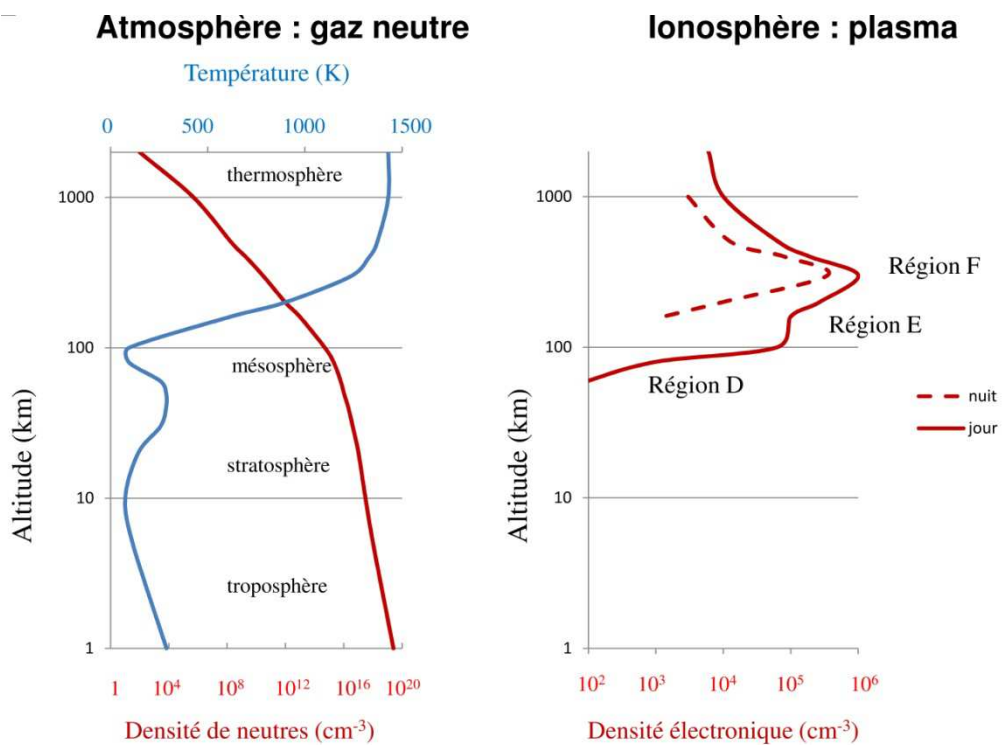


Figure 2. Profils de densité et de température dans l'ionosphère terrestre.

d) Les différents types de plasmas

L'état plasma regroupe donc des milieux très différents. A l'état naturel, les plasmas sont présents partout dans l'univers y compris à moins d'une centaine de kilomètres au-dessus de nos têtes. L'ionosphère est un exemple de plasma partiellement ionisé, atomes et molécules neutres cohabitent avec les électrons et les ions et donnent lieu à un grand nombre de réactions chimiques. Plus haut la température est plus élevée et l'ionisation est totale. Il en est de même dans beaucoup de plasmas astrophysiques.

A l'état artificiel, il y a aussi une grande gamme de paramètres accessibles, suivant que l'on considère les plasmas des flammes ou des décharges, ou les plasmas de fusion, plasmas portés à des températures très élevées pour que la fusion s'y produise.

On fera aussi la distinction entre plasmas magnétisés ou non magnétisés. Une façon efficace dans le laboratoire de confiner un plasma est d'introduire un champ magnétique externe, les particules restent alors proches des lignes de champ magnétique dans leur mouvement de giration (voir chapitre 2) et ne s'échappent pas du dispositif de confinement. On dira alors que le plasma est magnétisé. Dans la nature aussi on trouve des plasmas magnétisés, soit par le champ magnétique associé à une étoile ou une planète ou au milieu interstellaire, soit par un champ magnétique auto-généré par les plasmas. En l'absence de ce champ, on parlera de plasmas non-magnétisés.

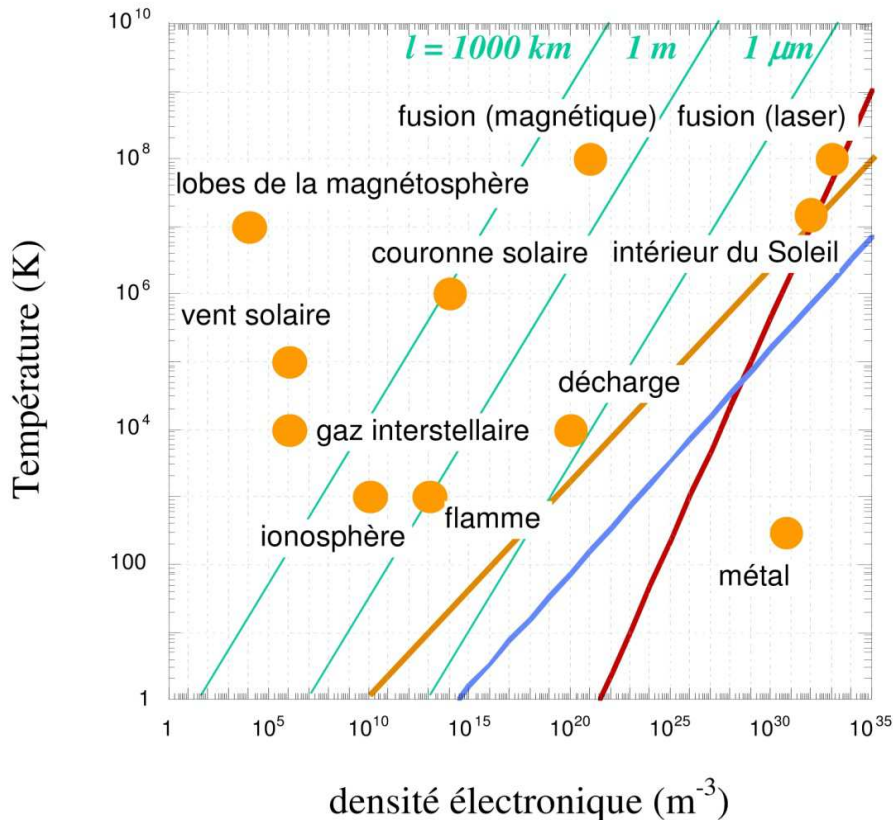


Figure 3. Ordre de grandeur des températures et des densités de quelques plasmas. Les échelles logarithmiques montrent l'étendue des gammes de paramètres que l'on rencontre dans la nature et dans les plasmas de laboratoire. Les droites en trait gras représentent les plasmas pour lesquels la distance interparticulaire d est égale à la longueur de Landau r_0 (bleu), à la longueur de Debye λ_{De} (jaune) ou à la longueur d'onde de Broglie λ_{dB} (rouge). Les droites vertes représentent la valeur du libre parcours moyen des électrons. Voir au paragraphe suivant la discussion de ces droites.

Comme on a vu, pour créer un plasma il faut fournir de l'énergie au système pour ioniser les particules, et le maintenir ionisé. Donc en général on pense à un plasma comme un milieu chaud, totalement ionisé, et globalement neutre. Cependant certains des plasmas mentionnés dans cette section ne sont pas complètement ionisés et les électrons sont les seuls à avoir acquis assez d'énergie pour un comportement type plasma. Dans ce genre de plasma que l'on qualifie de plasma « froid » les espèces neutres et les ions peuvent donner lieu à des réactions chimiques classiques. On remarque aussi que même pour les plasmas chauds, on a parfois des phénomènes ou les effets de température sont négligeables. Dans ce cas il arrive que on dise que le plasma est froid (ou se comporte comme un milieu froid) même si la température est de l'ordre de 100000 K! Dans la suite, on précisera quand c'est nécessaire les hypothèses qui nous permettent de négliger les effets de température.

La figure 3 regroupe les ordres de grandeur caractéristiques de quelques plasmas afin de fixer les idées sur ce que peut être un « plasma ». A titre de comparaison on peut se rappeler que l'atmosphère dans laquelle nous vivons a une densité (de neutres) d'environ $3 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ pour une température de 273 K. Ce sont donc des

conditions qui peuvent être radicalement différentes de celles qui nous sont familières que nous allons découvrir en explorant les plasmas.

2. LES EFFETS QUI DOMINENT LA PHYSIQUE

Dans un gaz neutre, ce sont les collisions qui régissent la dynamique globale du fluide. Dans les conditions habituelles de température et de pression (celles qu'on qualifie de "normales"), ces collisions sont tellement nombreuses qu'on ne s'écarte pratiquement pas de l'équilibre. Ce sont aussi ces collisions qui assurent diffusion et transport lorsque le système est hors d'équilibre. Les collisions dont on parle dans ce cas sont des collisions entre particules neutres, elles sont donc régies par des forces à courte portée qu'on peut modéliser sans faire une approximation trop lourde par le modèle qu'on appelle « des boules de billard ».

Dans un plasma totalement ionisé, les interactions qui interviennent entre particules sont électromagnétiques et donc fondamentalement différentes. A la différence des interactions entre particules neutres, ces interactions sont à longue portée, le champ créé par une charge ne décroissant qu'en $1/r^2$. Une particule donnée peut être sensible à un voisin très proche (« interaction binaire proche »), mais elle est sensible aussi à toutes les autres via les champs électromagnétiques qu'elles créent. Les interactions longue portée peuvent contribuer aux champs aléatoires (« interactions binaires lointaines») et une contribution moyenne non nulle. On parle d'interaction « collective » lorsque, dans une région donnée, une particule est soumise principalement au champ moyen créé par toutes les autres.

Dans le cas d'un plasma partiellement ionisé, que nous ne traiterons pas ici, les deux types d'interactions (à courte portée et électromagnétique) interviennent à la fois dans la physique du milieu. Les électrons ou les ions peuvent subir des collisions avec les particules neutres ou avec d'autres particules chargées.

Pour comprendre l'importance respective des collisions proches et du champ collectif, il est utile d'introduire une grandeur caractéristique du plasma, la longueur d'écrantage.

a) *Le phénomène d'écrantage*

Une longueur très importante caractéristique des plasmas, est la longueur de Debye ou longueur d'écrantage. Cette longueur caractérise la tendance du plasma à maintenir, à l'équilibre, un état de neutralité globale. On peut comprendre sa signification avec un exemple. Si on considère une particule de charge q , isolée, son potentiel électrostatique est donné par $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

La même particule dans un plasma aura tendance à attirer les particules de signe opposé et éloigner les particules du même signe, jusqu'à un équilibre où le mouvement thermique des particules compense la force du champ électrique. Le résultat est que le potentiel de la particule chargée dans le plasma est donnée par

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}$$

Dans un plasma, à cause du fait que la masse des électrons est beaucoup plus petite que la masse des ions, la mobilité des électrons est plus importante, et on peut considérer que l'écrantage est essentiellement dû aux électrons, même si en réalité les ions y participent aussi. On définit donc une longueur de Debye électronique $\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{ne^2}}$ qui est l'échelle d'écrantage de référence dans le plasma. Un autre exemple d'écrantage est reproduit dans la figure 4 où on montre l'effet de l'écrantage par un plasma autour de fils conducteurs chargés. Au centre de la figure il y a les fils conducteurs, autour desquels on a une gaine de largeur λ_D .

Sur une échelle plus petite ou du même ordre que la longueur de Debye on voit bien une accumulation de charge, mais à une distance plus grande le plasma est neutre : l'effet d'une charge isolée a une portée limitée dans un plasma.

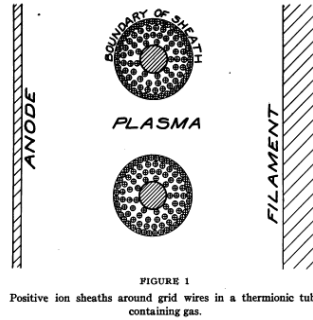


Figure 4. Ecrantage de Debye autour des fils conducteurs. Les limites de la gaine sont montrées explicitement, autour il y a un plasma globalement neutre. (Langmuir 1929)

b) Interactions binaires ou forces collectives ?

Pour décrire le rôle des collisions, entre particules neutres ou chargées, on utilise la notion de libre parcours moyen entre deux collisions. Le libre parcours moyen est la distance en dessous de laquelle la trajectoire est soit une ligne droite, soit une courbe déterminée entièrement par le seul champ collectif. On le calcule par une approche statistique sur toutes les collisions possibles. Dans un gaz neutre on comprend de manière intuitive sa signification : la trajectoire d'une particule est une ligne brisée dont les tronçons ont une taille moyenne qu'on appelle libre parcours moyen. Dans un plasma, du fait de la présence d'interactions avec des particules lointaines, typiquement par la force de Coulomb qui est une force à longue portée, la trajectoire est complètement différente. La figure 5 représente schématiquement ce que peut être une telle trajectoire : les particules peuvent s'approcher les unes des autres mais elles ne se rencontrent jamais vraiment. Dans ce contexte le libre parcours moyen est plutôt la distance au bout de laquelle la trajectoire a été significativement déviée sous l'effet d'un grand nombre d'interactions binaires.

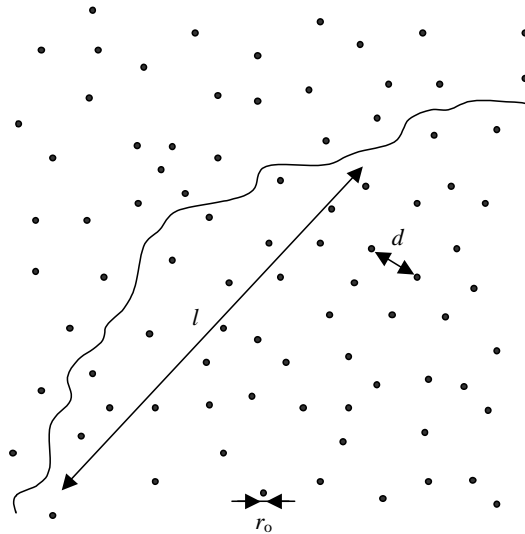


Figure 5. Allure de la trajectoire d'un électron (ou d'un ion) dans un plasma. Les distances caractéristiques sont représentées : l est le libre parcours moyen, d la distance moyenne entre particules, r_0 la longueur de Landau d'une particule.

Parmi ces collisions interviennent à la fois les collisions binaires proches et lointaines. En fait, le poids de ces dernières est beaucoup plus important et les collisions binaires proches sont très improbables. Pour caractériser l'interaction binaire proche, on peut calculer la longueur de Landau. Cette distance est celle à laquelle il faut que deux particules s'approchent pour avoir une énergie d'interaction égale à leur énergie cinétique moyenne, $k_B T$, où k_B est la constante de Boltzmann et T la température. Si on considère un électron, la

longueur de Landau vaut $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k_B T}$, c'est en quelque sorte la dimension de la particule du point de vue de

l'interaction électrostatique. Cela nous permet de définir une section efficace $\sigma = \pi r_0^2$ et le libre parcours moyen pour l'interaction proche $l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{16\pi^2 \epsilon^2_0 (k_B T)^2}{n e^4}$, où n est la densité des particules dans le système. Plus la densité est élevée plus le libre parcours moyen est petit et les collisions importantes. Des températures élevées correspondent par contre à des libres parcours moyens grands, et donc à peu de collisions.

Un calcul¹ plus précis du libre parcours moyen et qui tient compte aussi *des interactions lointaines* est basé sur la diffusion de Rutherford qui permet de calculer la déviation d'une particule chargée par une autre pour la force de Coulomb. A cause du phénomène de l'écrantage cependant on peut limiter l'interaction lointaine à des distance de l'ordre de la longueur de Debye (où typiquement $\lambda_D \gg r_0$). Avec cette hypothèse le calcul du libre parcours moyen pour les collisions proches et lointaines donne $l = \frac{4\pi\epsilon_0^2 (kT)^2}{n e^4 \ln \Lambda}$, où $\ln \Lambda$ (dit logarithme de

Coulomb) est un paramètre qui tient compte des interactions lointaines et de l'écrantage ($\Lambda \propto n \lambda_D^3$) et varie suivant les différents types de plasmas (de 5 à 30 environ). Si on compare ce résultat avec le calcul du libre parcours moyen basé seulement sur les interactions proches dans le paragraphe précédent, on voit que les résultats de la longue portée de la force de Coulomb est de réduire le libre parcours moyen d'un facteur $4\pi \ln \Lambda$ (facteur qui vaut de 50 à 300).

Les droites tracées en trait fin sur la figure 3 donnent les valeurs typiques du libre parcours-moyen en fonction des caractéristiques du plasma. On constate que, pour la plupart des plasmas astrophysiques, l est de l'ordre de grandeur de la taille des régions considérées. Les collisions sont donc très souvent complètement négligeables.

Dans un plasma de densité n , la distance moyenne d entre particule est de l'ordre de $n^{-1/3}$. On peut comparer les deux distances d et r_0 en fonction de la densité et de la température. La droite bleue tracée sur la figure 3 est obtenue pour $d = r_0$. On constate que presque tous les plasmas se situent à gauche de la droite ($r_0 < d$) et sont donc si dilués que la probabilité d'une rencontre binaire proche est totalement négligeable. Dans le cas opposé on parlera de plasmas fortement corrélés : dans ce cas on peut montrer que l'énergie potentielle d'interaction entre particules est plus grande que l'énergie cinétique moyenne, et il faut considérer non seulement les interactions binaires, mais aussi les interactions entre plusieurs particules, on ne traitera pas dans ce cours le cas des plasmas fortement corrélés.

Pour la plupart des plasmas on a l'inégalité suivante $r_0 < d < \lambda_{De}$. Cette inégalité nous permet de définir les plasmas classiques, c'est-à-dire les plasmas où le phénomène d'écrantage est efficace : il s'agit des plasmas pour lesquels on a un grand nombre de particules dans une sphère de rayon égal à la longueur de Debye ($n \lambda_{De}^3 \gg 1$ ou $d \ll \lambda_{De}$). Cela permet d'introduire un paramètre, dit le paramètre plasma

$$g = \frac{1}{n \lambda_{De}^3} = \frac{4\pi r_0}{\lambda_{De}} = \left(\frac{d}{\lambda_{De}} \right)^3 \propto \left(\frac{r_0}{d} \right)^{3/2}$$

Pour les plasmas classiques, pas trop denses, et assez chauds, ce paramètre est petit $g \ll 1$. La droite $\lambda_{De} = d$ est reproduite sur la figure 3, il s'agit de la droite jaune. On voit que la plupart des plasmas sont à gauche de cette ligne et rentrent donc dans la catégorie des plasmas classiques.

Pour ces plasmas le mouvement collectif des particules chargées domine, et on pourra négliger ou traiter de façon perturbative l'effet des collisions entre particules, et le microchamp coulombien associé à chaque particule. En pratique le plasma se comporte alors comme un fluide chargé avec un mouvement d'ensemble de particules qui peuvent créer un champ macroscopique.

¹ Pour le calcul détaillé, voir, par exemple, Delcroix et Bers, tome 1, chapitre 3.

Si on est dans la situation opposée, c'est-à-dire $g \gg 1$, on retrouvera la situation où les plasmas sont fortement corrélés : en effet on peut montrer facilement $g \gg 1$ implique $r_0 \gg d$ qui n'est pas traité dans ce cours.

c) Rôle des effets quantiques

Les électrons du plasma sont des fermions et on sait que s'ils se retrouvent trop proches, les effets quantiques vont intervenir. On peut caractériser ces effets par l'énergie de Fermi

$$\epsilon_F = \frac{h^2(3\pi^2 n)^{2/3}}{8\pi^2 m_e}$$

La comparaison entre énergie thermique et énergie de Fermi est équivalente à la comparaison entre la distance d entre particules et la longueur d'onde de De Broglie ; elle aboutit au tracé de la ligne rouge sur la figure 3. On rappelle que la longueur d'onde de De Broglie pour une particule avec vitesse égale à la vitesse thermique est définie par $\lambda_{dB} = h/\sqrt{k_B T m_e}$. On constate que pour la plupart des plasmas, à gauche de la ligne, l'énergie thermique est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à l'énergie de Fermi. Le point qui représente un métal typique est lui bien au-dessous de cette droite, ce qui correspond au fait bien connu que les effets quantiques sont fondamentaux pour comprendre le comportement métallique. Les plasmas de l'intérieur de certaines étoiles peuvent être aussi sensibles aux effets quantiques, on les appelle alors dégénérés. Ils ne seront pas étudiés dans le cadre de ce cours.

La conclusion qu'on peut tirer de cette étude rapide est que les effets qui régissent la physique des plasmas sont, en général, fondamentalement différents de ceux qui régissent les gaz. Les interactions binaires sont souvent négligeables et seuls interviennent dans la dynamique les effets collectifs : ce sont donc eux qui seront étudiés essentiellement dans la suite de ce cours.

3. LE SYSTEME COUPLE CHAMPS / PARTICULES : CAS GENERAL

Dans un plasma, les variations du champ électromagnétique et les mouvements des particules chargées sont couplés. De façon générale:

- Si on connaît les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , on connaît les forces électromagnétiques s'exerçant sur les particules et comment ces forces influencent les trajectoires.

- Si on connaît la position et la vitesse de toutes les particules du plasma, électrons et ions, on peut en déduire la densité de charge ρ et le courant \mathbf{j} qui sont les termes sources, dans les équations de Maxwell, des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} .

Ce système couplé et auto-consistant est à la base de toute la physique des plasmas. C'est lui qui fait que cette science se situe à l'intersection entre l'électromagnétisme (Maxwell) et la mécanique statistique (comment passer des informations sur les trajectoires individuelles aux informations macroscopiques que sont ρ et \mathbf{j}). Il est schématisé sur la figure 6.

Il est important de noter que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont les champs dits « collectifs », c'est à dire moyennés d'une façon ou d'une autre (ceci sera précisé dans le chapitre 3). A ces champs collectifs s'ajoute en fait, dans le champ instantané mesuré en un point, un « bruit » de fluctuations très rapides qui est dû au caractère particulier du plasma : on comprend bien que le champ en un point devient brièvement très grand chaque fois qu'une particule passe très près de ce point. Mais l'effet de ce bruit particulier ne se fait logiquement sentir que lorsque deux particules sont effectivement amenées à passer très près l'une de l'autre et on verra qu'on peut l'inclure comme un terme séparé de « forces de collisions » dans l'équation du mouvement des particules. Cette propriété est fondamentalement différente de ce qui se passe dans les gaz où la dynamique des particules et des champs électromagnétiques sont découplés.

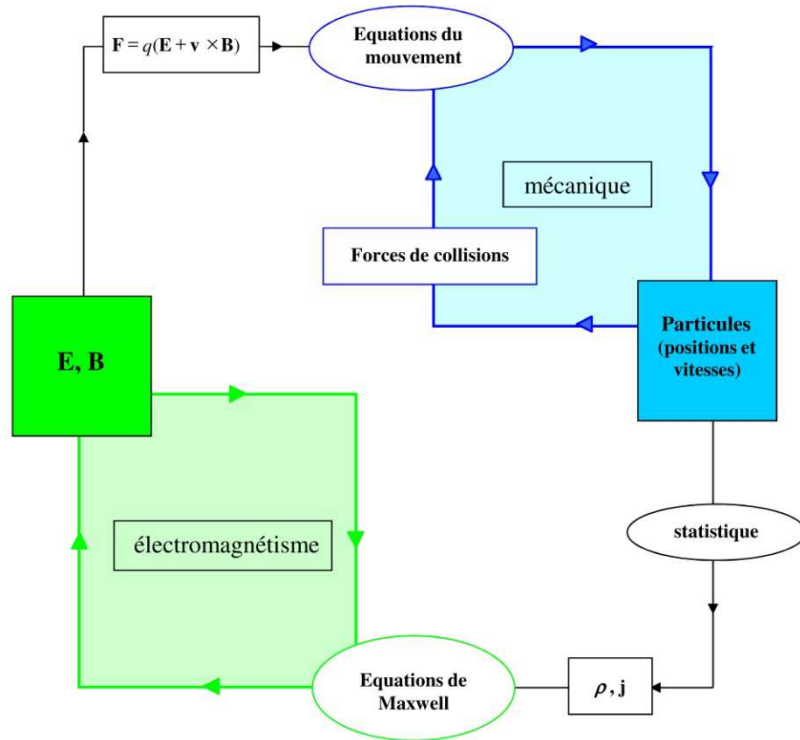


Figure 6. Couplage entre les mouvements des particules et les variations du champ électromagnétique dans un plasma

4. UN CAS PARTICULIER : L'OSCILLATION DE PLASMA

a) Position du problème

On considère un plasma homogène composé d'ions et d'électrons tous immobiles (donc chaque espèce a une vitesse moyenne nulle et une température nulle), de mêmes densités numériques $n_e = n_i = n_0$ (donc pas de densité de charge), et en l'absence de champ électromagnétique. Sans perturbation extérieure, ce système reste évidemment stationnaire.

Au temps $t = 0$, on perturbe une tranche de ce système en comprimant un peu les électrons dans une direction x (voir Figure 7). On part donc d'une situation initiale où $n_e = n_0 + n_1(x)$ et pour laquelle la densité de charge locale n'est plus nulle : $\rho = e(n_i - n_e) = -en_1 \neq 0$.

Comment le milieu va-t-il réagir à cette perturbation de la densité électronique ? La perturbation peut-elle se propager comme peut le faire une variation de densité dans un gaz neutre collisionnel (onde sonore) ? Si oui, avec quelle vitesse caractéristique ? Ou bien va-t-elle se déformer, s'amortir, osciller sur place, ... ? Ce sont les questions auxquelles nous allons chercher à répondre. Écrivons pour cela les équations d'évolution et résolvons-les.

b) Champ créé par les charges

La densité de charge peut être posée égale à $-en_1$ si on suppose que la densité numérique des ions reste constante. Cette hypothèse pourra se justifier *a posteriori* car l'évolution que l'on va trouver se fait sur une échelle de temps fixée par les électrons qui est telle que les ions n'ont quasiment pas le temps de bouger (les protons sont 2000 fois plus lourds que les électrons, les autres ions sont encore plus lourds).

Le **champ électrique** créé par cette densité non nulle de charge est dirigé selon x et il se calcule par l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\partial_x (E_x) = -en_1/\epsilon_0 \quad (1)$$

(en notant ∂_x l'opérateur de dérivation partielle par rapport à x : $\partial_x (A) = \partial A / \partial x$).

Remarque : il n'y a pas de champ magnétique associé !

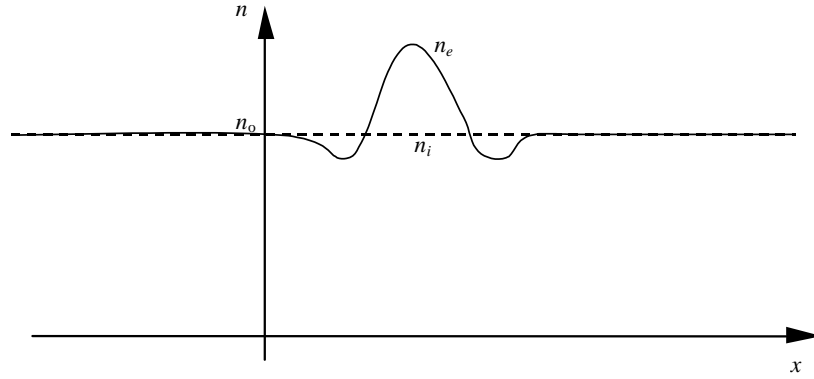


Figure 7 : Perturbation initiale de la densité électronique

c) Déplacement des charges dû au champ

Les électrons se déplacent sous l'effet du champ électrique. La loi fondamentale de la dynamique appliquée à chaque électron s'écrit donc :

$$m_e \partial_t (v_{ex}) = -eE_x \quad (a)$$

Le déplacement des électrons se fait évidemment des régions les plus denses vers les régions les moins denses. Pour calculer l'effet de ces mouvements individuels sur l'évolution de la densité (et donc boucler le système), il faut en général faire un calcul statistique. Ici, ce travail est réduit à sa plus simple expression : puisque les électrons ont été supposés froids, ils démarrent tous avec la même vitesse initiale $v_{ex} = 0$ et tous ceux qui sont originaires du même point x suivent donc la même trajectoire et voient le même champ en même temps. Les vitesses individuelles des électrons en un x donné sont donc toutes égales entre elles et égales à la vitesse macroscopique en ce point :

$$v_{ex} = \langle v_{ex} \rangle = u_{ex}$$

On peut donc écrire une équation pour la variable vitesse fluide

$$m_e \partial_t (u_{ex}) = -eE_x \quad (b)$$

La variation de densité découlant de ces mouvements se déduit de l'équation de conservation du nombre de particules ou « équation de continuité » (qui sera démontrée au chapitre 4):

$$\partial_t (n_e) + \partial_x (n_e u_{ex}) = 0 \quad (c)$$

Si on considère des petites perturbations, c'est-à-dire que $n_1 \ll n_0$ on peut linéariser cette équation et écrire:

$$\partial_t (n_1) + n_0 \partial_x (u_{ex}) + \partial_x (n_1 u_{ex}) \approx \partial_t (n_1) + n_0 \partial_x (u_{ex}) = 0 \quad (d)$$

où on a utilisé le fait que n_0 est constant, et négligé le terme produit de deux petites perturbations car très petit par rapport aux autres termes. Le résultat est donc, en combinant (b) et (d) :

$$\partial_t^2 (n_1) = \frac{n_0 e}{m_e} \partial_x (E_x) \quad (2)$$

d) Résolution du système couplé

L'ensemble des deux équations (1) et (2) forme un système en n_1 et E_x . Si on résout par exemple en n_1 , on obtient :

$$\boxed{(\partial_t^2 + \omega_{pe}^2)(n_1) = 0} \quad \text{avec } \omega_{pe}^2 = n_o \frac{e^2}{m_e \epsilon_o}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur dont la solution générale est :

$$n_1(x, t) = n_{1a}(x) e^{-i\omega_{pe}t} + n_{1b}(x) e^{+i\omega_{pe}t}$$

La fréquence caractéristique ω_{pe} est appelée **fréquence plasma** électronique². Dans chaque tranche en x , la perturbation de densité électronique oscille donc sans s'amortir (dans le cadre des approximations faites) à cette fréquence unique ω_{pe} . Les phases d'oscillation sont indépendantes d'une tranche à sa voisine et sont fixées par les conditions initiales. Si on fixe par exemple pour n_1 une variation spatiale initiale de forme sinusoïdale et caractérisée par un nombre d'onde k , on obtiendra en général la superposition de deux sinusoïdes se propageant l'une vers la droite, l'autre vers la gauche. L'amplitude respective de ces deux sinusoïdes est fixée par une autre condition initiale, par exemple la dérivée $\partial_t(n_1)$ ou la valeur du champ électrique. Si les deux amplitudes se trouvent égales, on n'observe pas de propagation mais une onde stationnaire ; c'est ce qu'on obtient en partant d'une condition initiale immobile (toutes les tranches oscillent alors en phase).

On vient de voir que la fréquence d'oscillation $\omega = \omega_{pe}$ de chaque tranche est indépendante de la forme choisie pour la variation spatiale ; pour une variation spatiale sinusoïdale, elle est donc a fortiori indépendante du nombre d'onde. En utilisant le vocabulaire des ondes, qui est très utile pour caractériser les propriétés d'un milieu, ceci signifie que la **relation de dispersion** $\omega(k)$ prend ici la forme remarquablement simple illustrée sur la Figure 8.

On appelle parfois « **onde de Langmuir** » l'onde ainsi trouvée. La pente nulle de la relation de dispersion $\partial\omega/\partial k = 0$ montre l'absence de propagation de l'énergie (*vitesse de groupe nulle*). Par contre, on voit que la vitesse de phase $\omega/k = \omega_{pe}/k$ dépend de k et peut prendre toutes les valeurs entre zéro et l'infini. On notera la différence entre le résultat ci-dessus et celui qu'on obtient lorsqu'on calcule l'évolution d'une variation de densité dans un gaz neutre et chaud (onde sonore). On obtient dans ce cas une relation de dispersion linéaire $\omega = kc_s$. La fréquence d'oscillation dépend alors de la forme spatiale, et donc : vitesse de groupe = vitesse de phase = constante. (Chaque tranche de fluide a une oscillation qui dépend de l'oscillation des tranches voisines qui lui passent l'information avec un léger retard).

On vient de montrer qu'il peut exister, dans un plasma, des « **ondes électrostatiques** », c'est à dire des ondes pour lesquelles le champ électrique n'a que une composante longitudinale (parallèle à \mathbf{k} , c'est-à-dire parallèle à la direction x des gradients ou de propagation de l'onde). On qualifie ces phénomènes d'« électrostatiques » car la composante longitudinale du champ est due à une densité de charge qui n'implique pas de champ magnétique, de manière bien différente des ondes électromagnétiques habituelles dans le vide avec une polarisation électrique purement transversale.

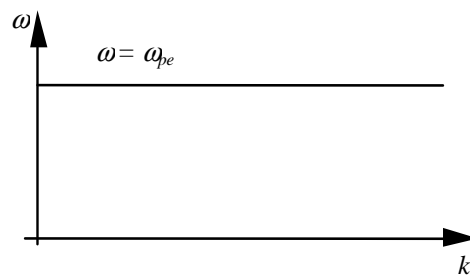


Figure 8. Relation de dispersion $\omega(k)$ de l'oscillation de plasma

². *Remarque* : bien que ω_{pe} soit une pulsation (rad/s) et qu'on note la fréquence par $f_{pe} = \omega_{pe}/2\pi$, il est d'usage de parler dans les deux cas de fréquence, même si strictement parlant on devrait faire la différence entre fréquence et pulsation.

5. LA FREQUENCE PLASMA

a) $\tau = \omega_{pe}^{-1}$: temps caractéristique de réponse des électrons

C'est le premier temps caractéristique d'un plasma que l'on rencontre. (Ce n'est pas le seul, on en verra d'autres qui sont associés à d'autres phénomènes). **C'est le temps de réponse des électrons aux écarts à la neutralité** : dans un plasma froid, (i.e. où on néglige les effets de température) on vient de voir qu'un excès de charge ne peut pas exister de façon stationnaire sur un temps supérieur ou égal à ω_{pe}^{-1} : sous l'effet du champ électrostatique qui joue le rôle de force de rappel, les électrons se précipitent pour boucher les trous en un temps de l'ordre de τ (ensuite, emportés par l'élan, ils dépassent la position d'équilibre et tout recommence dans l'autre sens ; c'est le même principe qu'un ressort qui oscille).

Par ailleurs, la fréquence plasma apparaît également comme l'une des fréquences privilégiées où peuvent se produire les échanges d'énergie entre le champ électromagnétique et l'énergie thermique des particules. Elle joue un rôle particulier pour l'amplification ou l'absorption d'ondes (cf. instabilité de faisceau, phénomène de coupure des ondes radio par l'ionosphère, chauffage du plasma en fusion inertielle,...).

Remarque : en plasma froid et non magnétisé, seul le temps caractéristique $\tau = \omega_{pe}^{-1}$ apparaît. Plus généralement, il est clair qu'il apparaît bien d'autres phénomènes que les oscillations de plasma dans toutes les situations de la physique des plasmas moins idéalisées que celle qui vient d'être étudiée (avec effets de température, en présence de courants et champ magnétique, avec mouvement des ions, situations non-linéaires, géométrie 3-D, etc...), qui font que dans les plasmas il y a un véritable 'zoo' d'ondes possibles ! Mais il reste vrai que, dans tous les cas, cette fréquence organise les comportements : pour tous les phénomènes se produisant à des fréquences plus basses ($\omega \ll \omega_{pe}$), les électrons peuvent être considérés comme infiniment rapides, assurant une quasi-neutralité du plasma et annulant en grande partie le champ électrostatique (sauf aux échelles spatiales plus petites que λ_D si le plasma est chaud), alors qu'à partir de cette fréquence ($\omega \geq \omega_{pe}$), l'inertie des électrons doit être prise en compte et tous les phénomènes font intervenir les écarts à la neutralité et le champ électrostatique.

b) Quelques fréquences plasma caractéristiques

On a vu que, par définition, $\omega_{pe}^2 = n_o \frac{e^2}{m_e \epsilon_o}$. Numériquement, la fréquence correspondante $f_{pe} = \omega_{pe} / 2\pi$ vaut

$$f_{pe} = 9 \sqrt{n_o} \quad (f_{pe} \text{ en Hz}, n_o \text{ en m}^{-3}).$$

Voici quelques exemples d'ordres de grandeur (la longueur d'onde λ_o des ondes dans le vide pour des ondes électromagnétiques avec $\omega = \omega_{pe}$ est donnée pour référence, mais attention ce n'est pas la longueur d'onde de l'onde dans le plasma):

	densité (m ⁻³)	fréquence plasma ($\lambda_o = c/f_{pe}$)
Lobes de la magnétosphère	10 ⁴	900 Hz ($\lambda \approx 300$ km)
Vent solaire	5 10 ⁶	20 kHz ($\lambda \approx 15$ km)
Max ionosphère (250 km)	5 10 ¹¹	6 MHz ($\lambda \approx 50$ m)
Couronne solaire	10 ¹⁴	90 MHz ($\lambda \approx 3$ m)
Atmosphère de pulsar	10 ¹⁸	9 GHz ($\lambda \approx 3$ cm)
Tube à décharge (néon)	10 ¹⁸	idem
Plasma de fusion (tokamak)	10 ²¹	3 10 ¹¹ Hz (IR)
Plasma créé par laser	10 ²⁷	3 10 ¹⁴ Hz (Visible)
Electrons dans un métal	10 ²⁹	3 10 ¹⁵ Hz (UV)
Intérieur du Soleil	10 ³²	9 10 ¹⁶ Hz (UV)

6. EFFETS DE LA TEMPERATURE

Quand on supprime une ou plusieurs des hypothèses simplificatrices utilisées dans le traitement ci-dessus, on trouve d'une part que les propriétés de l'oscillation de plasma sont modifiées par rapport aux résultats précédents et d'autre part qu'il existe un grand nombre d'autres modes propres du plasma (c'est-à-dire fréquences naturelles d'excitation associés aux nouveaux phénomènes pris en compte). Dans ce chapitre introductif, nous évoquerons seulement le phénomène de prise en compte de l'*agitation thermique* des particules. Le calcul détaillé de la modification de l'oscillation plasma et la possibilité d'exciter d'autres ondes dans le plasma sera fait au chapitre 4.

a) La fonction de distribution des vitesses

Si le gaz d'électrons n'est pas "froid", cela signifie que les vitesses initiales v_{eo} des différentes particules ne sont pas nulles. Considérant que le nombre d'électrons est assez grand pour que l'on puisse utiliser un traitement statistique (c'est une hypothèse toujours vérifiée en pratique), on peut caractériser alors le gaz d'électrons par sa "fonction de distribution". On appelle ainsi la *distribution de probabilité* des vitesses de l'ensemble des électrons; on peut bien sûr la définir pour n'importe quel instant t (pas forcément l'instant initial $t = 0$) et n'importe quelle position x donnés. La représentation graphique de cet histogramme des vitesses donne l'allure de la fonction de distribution, un exemple est donné dans la figure 9.

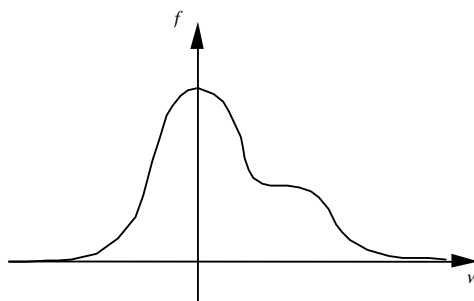


Figure 9. Fonction de distribution des vitesses

Une fonction d'équilibre bien connue et qu'on utilise pour décrire les gaz neutres, est la fonction de distribution gaussienne, que l'on appelle dans ce contexte « **maxwellienne** » par référence à la distribution de Maxwell-Boltzmann, bien connue en physique statistique. Pour les plasmas classiques on considère la plupart du temps que les particules suivent une distribution maxwellienne. Cependant si les collisions sont négligeables la fonction de distribution du plasma peut dans certains cas s'écarter significativement de la maxwellienne.

Une fois qu'on a identifié la fonction de distribution des particules, il est utile de savoir déduire les grandeurs macroscopiques usuelles (densité, vitesse fluide, pression, ...). Ces grandeurs constituent, au sens des distributions de probabilité, les « moments » de la fonction de distribution. Ils permettent de savoir, de façon quantitative mais sans connaître tous les détails de la fonction, si cette distribution est centrée autour de zéro ou autour d'une vitesse moyenne non nulle, si elle est large ou étroite, etc... Voici les définitions des premiers moments ; leurs expressions sont ici simplifiées grâce au contexte monodimensionnel dans lequel nous travaillons dans cette introduction. Les définitions vectorielles (et tensorielles) complètes seront données au chapitre 4.

– densité numérique $n = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv$

– vitesse fluide $u = \langle w \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} v f(v) dv$

– vitesse quadratique moyenne $V_{th}^2 = \langle (v-u)^2 \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} (v-u)^2 f(v) dv$

– 3^{ème} moment (flux de chaleur) $\frac{q}{nm} = \langle (v-u)^3 \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} (v-u)^3 f(v) dv$

...

Les définitions de la pression cinétique et de la température se déduisent de la vitesse thermique précédente : $p = nmV_{th}^2 = nk_B T$

Dans le cas particulier d'une distribution maxwellienne, l'expression mathématique de f est (à une dimension) :

$$f(v) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}V_{th}} e^{-\frac{(v-u)^2}{2V_{th}^2}},$$

et il est bien clair que les **trois** premiers moments n , v et V_{th} **suffisent** à déterminer complètement la forme. Si besoin est, on peut calculer tous les autres moments en fonction du second (V_{th}): les moments pairs sont donnés par : $\langle w^n \rangle = (n-1)! V_{th}^n$ et les moments impairs sont nuls³. Cela explique que toutes les théories fluides (hydrodynamique, théorie des gaz, thermodynamique,...) utilisées dans les milieux collisionnels ne reposent que sur trois grandeurs macroscopiques : densité, vitesse et pression. Ceci n'est pas vrai en général pour un plasma sans collisions où la restriction d'une fonction de distribution à quelques moments seulement ne doit être faite qu'avec précautions : en général, la fonction de distribution est équivalente à la donnée de la série infinie de ses moments et toute **coupure** dans cette série constitue toujours une **approximation**.

b) Les différents traitements théoriques.

Pour traiter un problème de physique des plasmas comme celui de l'oscillation de plasma, deux types de méthodes sont utilisées :

- **Traitement cinétique** : c'est le traitement complet. On calcule l'évolution de la fonction de distribution $f(v)$ en fonction de x et de t à l'aide de l'équation de Vlasov (cf. chapitre 3) et on en déduit (grâce aux moments que l'on vient d'introduire) les grandeurs macroscopiques intéressantes n , v , p , (ou T), E , B , On verra ce traitement au chapitre 6 pour le cas de l'oscillation de plasma. Il faut noter que de façon générale, ce traitement complet est difficile.

- **Traitement fluide** : on ramène (par intégration) le problème à un système d'équations qui ne fait apparaître que les quelques premiers moments (en général n , v et p ou T), et on résout. Ceci est assez facilement réalisable dans le cas collisionnel. Mais pour un milieu sans collision, on ne peut pas dire qu'un tel système limité existe en toute généralité et que les premiers moments soient toujours reliés entre eux indépendamment des moments d'ordre supérieur. On ne peut le faire que lorsque certaines approximations justifiées le permettent. Ceci sera détaillé au Chapitre 4, ou on discutera la notion de fermeture.

³ La factorielle double est définie par $p!! = p \times (p-2) \times \dots \times 3 \times 1$ pour n impair.

Vue la complexité des systèmes d'équations à résoudre, on peut utiliser une approche numérique du traitement cinétique ou fluide. Cela peut permettre de trouver des solutions pour certains problèmes, mais il reste assez "cher" en termes de calcul numérique, surtout pour ce qui concerne la description cinétique, et en pratique il n'est utilisé que pour des problèmes assez épurés, avec des géométries simples.

7. QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION DE LA PHYSIQUE DES PLASMAS

a) La fusion et la physique des plasmas

La fusion est la rencontre des deux noyaux légers chargés positivement. Si on arrive à les faire rapprocher assez ils vont fusionner en un noyau plus lourd avec une très forte libération d'énergie. Le Soleil est un réacteur thermonucléaire naturel dont le confinement inertiel est assuré par la force de gravité et la pression de la masse de plasma qui entoure le noyau ('core', partie interne du Soleil, voir figure 10). La fusion de l'hydrogène (réaction proton-proton) y est très lente et l'étoile reste stable. La température est de l'ordre de $15 \cdot 10^6$ K (1,5 keV). Sur Terre la réaction la plus simple que l'on peut produire en laboratoire est la fusion d'un noyau de Deutérium et un noyau de Tritium qui produit un noyau d'hélium et un neutron énergétiques selon la réaction $D + T \rightarrow \alpha (3,3 \text{ MeV}) + n (14,1 \text{ MeV})$. Pour cela on a besoin de températures de l'ordre de $100 \cdot 10^6$ K (10 keV), et la matière à fusionner est à l'état plasma.

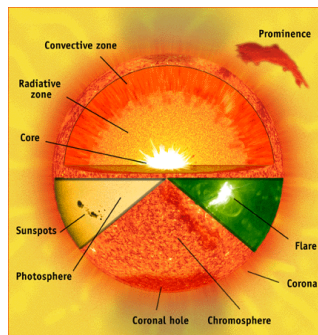


Figure 10. Les réactions de fusion dans le noyau du Soleil produisent de l'énergie (NASA/SOHO).

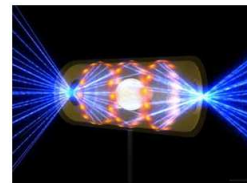
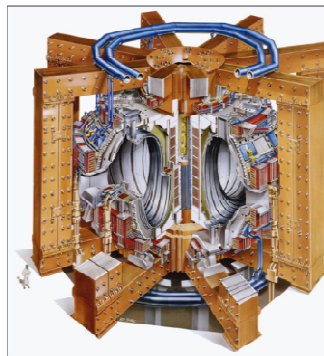


Figure 11. A gauche : dispositif pour la fusion par confinement magnétique (JET, EFDA), à droite dispositif pour la fusion par confinement inertiel (NIF)

Pour maintenir la matière à l'état de plasma dans le laboratoire il faut le confiner. Dans le cas de la fusion par confinement magnétique ceci est fait grâce à des champs magnétiques produit par de grands dispositifs comme dans la figure 11, à gauche. Dans le cas de la fusion par confinement inertiel le plasma est crée en chauffant une bille de matière dense par laser (figure 11 à droite) ou par faisceaux de particules et confiné par sa pression.

Remarque : les figures ne sont pas à l'échelle, le dispositif pour la fusion par confinement magnétique mesure plusieurs dizaines de mètres et le dispositif pour la fusion par confinement inertiel quelque millimètres.

b) Les plasmas froids et leurs applications.

Les plasmas dits « froids » couvrent une grande gamme de pression, allant de 0,1 Pa à quelques atmosphères. On peut même en créer par décharge dans les liquides.

Compte-tenu du fait que le plasma froid n'est pas complètement ionisé, c'est un mélange de molécules, d'atomes, de radicaux, et d'ions réactifs. Il peut donc être le siège de réactions chimiques et un certain nombre d'applications sont liées à cette réactivité chimique, comme la dépollution (figure 12), les traitements de surface (utilisés pour faire des dépôts ou de la gravure) ou les premières applications biomédicales. La plupart des plasmas froids sont obtenus par décharge électrique. Les plus connus sont la foudre et les lampes basse consommation. Pour ces lampes et pour les applications en laboratoire ou dans l'industrie, les décharges sont alternatives à des fréquences allant de quelques kHz à quelques 10 MHz (on parle alors de plasma radiofréquence, figure 13). Il existe une autre application des plasmas froids qui n'est pas faite pour fonctionner en laboratoire, ce sont les propulseurs dits « électriques » qui propulsent des satellites en éjectant des ions et non des neutres comme dans un propulseur chimique classique.

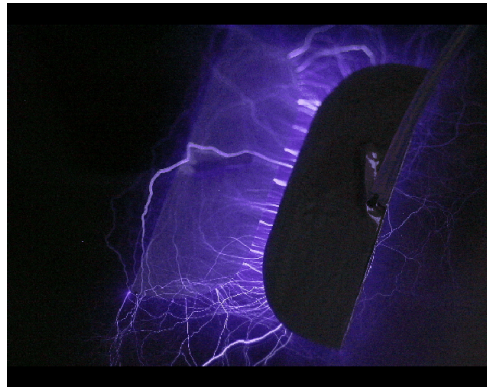


Figure 12. Micro-décharges pour la dépollution (LPP)



Figure 13. Réacteur radiofréquence (LPP)

L'ionosphère de la Terre est-elle un plasma froid ou un plasma chaud ? On n'y fait en général pas référence en ces termes. En réalité le comportement du plasma évolue en fonction de l'altitude. Dans les régions E et F (voir figure 2) qui correspondent au maximum de densité électronique, le plasma est froid avec une température électronique très supérieure à celle des ions et des neutres. Quand on monte, la densité des neutres diminue fortement (jusqu'à ce qu'ils finissent par disparaître), alors que le plasma se raréfie aussi et la température des ions augmente pour finir par rejoindre celle des électrons. Le plasma devient donc chaud (comme celui de la magnétosphère qui est au-dessus) au sens où les ions et les électrons sont en équilibre thermique, même si leur température n'est pas très élevée (de l'ordre de 3000 K à 1000 km).

c) La production de particules énergétiques par accélérateur plasma.

Si on focalise un laser de puissance sur un plasma de petite taille (du micron au millimètre), il est possible de créer des faisceaux de particules très énergétiques. Lors de l'interaction du laser avec le plasma, des champs électriques extrêmes sont produits : ils peuvent atteindre de valeurs de l'ordre du TV/m, soit plus de 10 000 fois plus intenses que les champs électriques produits dans les structures radiofréquence des accélérateurs

'traditionnels'. Différents schémas permettent d'accélérer des électrons ou des ions, dans la figure 14 on illustre l'accélération dite par 'TNSA' (Target Normal Sheat Acceleration) : les électrons du plasma chauffés par le laser forment un front de charges négatives et la séparation des charges génère un champ électrique intense qui accélère les ions. Les ions ainsi créés peuvent être utilisé pour différentes applications, médicale, nucléaire, diagnostiques, avec l'avantage d'avoir été créés dans un système en miniature.

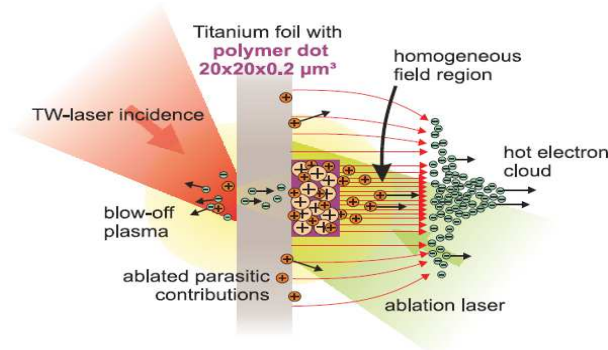


Figure 14. Accélération d'ions par 'Target Normal Sheat Acceleration' (New Journal of Physics, S. M. Pfotenhauer (2008))

d) Plasmas astrophysiques.

Comme on l'a vu précédemment, la grande majorité de la matière observable dans l'univers est sous forme de plasma : un environnement aussi froid, dense, et protégé de tout rayonnement ionisant que la surface terrestre fait exception. On parle souvent de plasmas spatiaux pour désigner les plasmas astrophysiques suffisamment proches de la terre pour être accessibles par des sondes spatiales, capables d'y réaliser des mesures in-situ. Par ordre de distance à la Terre, ceux-ci incluent l'ionosphère, étudiées par des fusées sondes dès les années soixante, la magnétosphère, environnement plasma contenu dans la zone d'influence du champ magnétique terrestre (jusqu'à environ 10 rayons terrestres du côté du soleil). Au delà de la magnétosphère se trouve le milieu interplanétaire, baigné par un plasma s'écoulant radialement depuis le soleil : le vent solaire. Ce vent est créé par l'évaporation de l'atmosphère (ou couronne) solaire, trop chaude pour être confinée par la gravité solaire. Il souffle jusqu'à des distances d'environ 100 UA, soit bien après l'orbite de la dernière planète (Neptune à 30 UA). On appelle héliosphère cette sphère d'influence du plasma (et par là-même du champ magnétique) d'origine solaire. Au delà, s'étend le milieu interstellaire, composé d'un mélange très inhomogène de gaz sous formes atomiques et moléculaires, et de plasma. Dans ce milieu interstellaire dérivent des étoiles, dont l'environnement plasma peut-être comparable à celui du soleil (étoiles de la série principale), mais aussi très différent : on trouve par exemple des environnements très magnétisés autour d'objets compacts comme les étoiles à neutrons, responsables des phénomènes radio-astronomiques de pulsar (champs à la surface jusqu'à 10^{11} T !). Le cœur de ces étoiles fournit un exemple de plasma dégénéré, où les effets quantiques jouent un rôle primordial. Les ordres de grandeurs des paramètres caractérisant ces environnements sont visibles sur la Fig.3, illustrant la très grande diversité de paramètres que l'on peut retrouver dans l'étude des plasmas astrophysiques.

Pour conclure ce chapitre la figure 15 résume la grande variété des plasmas et d'applications de l'étude de la physique du plasma.

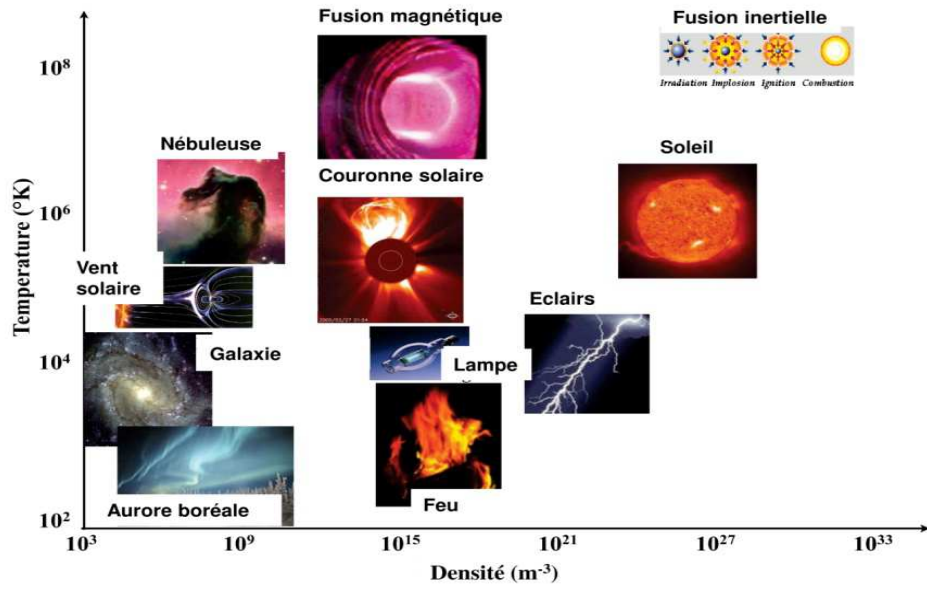


Figure 15. Le diagramme densité/température pour différents type de plasmas.

CHAPITRE 2. TRAJECTOIRES INDIVIDUELLES DANS UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

On a vu que la connaissance des trajectoires individuelles des particules est un maillon primordial dans l'étude du système bouclé qu'est un plasma. Avant toute étude statistique, commençons donc par préciser ce que sont ces trajectoires en présence de champs magnétique et électrique donnés. Pour décrire les plasmas magnétisés, cette étude constitue la première étape : ce n'est qu'ensuite qu'on pourra chercher à boucler le système et calculer comment la connaissance de l'ensemble des trajectoires de particules permet de déterminer les champs eux-mêmes. On restera ici dans le cadre des trajectoires sans collision.

1. TRAJECTOIRE D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE UNIFORME ET STATIONNAIRE

Commençons par rappeler brièvement des résultats connus sur la trajectoire d'une particule chargée dans le cas le plus simple : un champ électromagnétique constant et aucune autre force (pesanteur, collisions, etc...). Rappelons que l'on note ici \mathbf{v} la vitesse des particules individuelles.

a) Sans champ électrique ($E=0$)

Le mouvement dans ce cas est une hélice enroulée autour d'une ligne de champ de \mathbf{B} :

- parallèlement au champ magnétique : mouvement rectiligne uniforme $v_{\parallel} = \text{cste}$
- perpendiculairement au champ magnétique : mouvement circulaire uniforme : $v_{\perp} = \text{cste}$

Le mouvement de giration dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B} est appelé mouvement cyclotron (figure 1), et il est caractérisé par :

- sa fréquence de rotation (**gyrofréquence**) : $\omega_c = 2\pi f_c = qB/m$
(indépendante de l'énergie de la particule)
- son rayon (rayon de Larmor) : $\rho_L = v_{\perp} / \omega_c$
(proportionnel à v_{\perp} et donc dépendant de l'énergie)
- $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

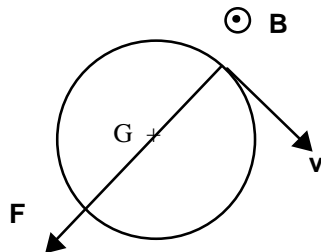


Figure 1. Mouvement d'un ion positif dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B} .

Noter qu'un ion *positif* tourne dans le sens "gauche" autour du champ magnétique (= sens rétrograde dans le plan de la figure orienté par **B**).

On appelle "angle d'attaque" ("pitch angle" en anglais) l'angle α que fait la vitesse avec **B**. Cet angle, constant dans le cas présent, est l'une des caractéristiques importantes de la trajectoire puisqu'il détermine le "pas" de l'hélice. Il est relié aux composantes parallèle et perpendiculaire de la vitesse par :

$$\tan(\alpha) = v_{\perp}/v_{\parallel}$$

Le pas de l'hélice, c'est à dire la distance parcourue le long du champ magnétique au cours d'une rotation de Larmor complète vaut donc

$$h = v_{\parallel}(2\pi/\omega_c) = 2\pi\rho_L \cot(\alpha)$$

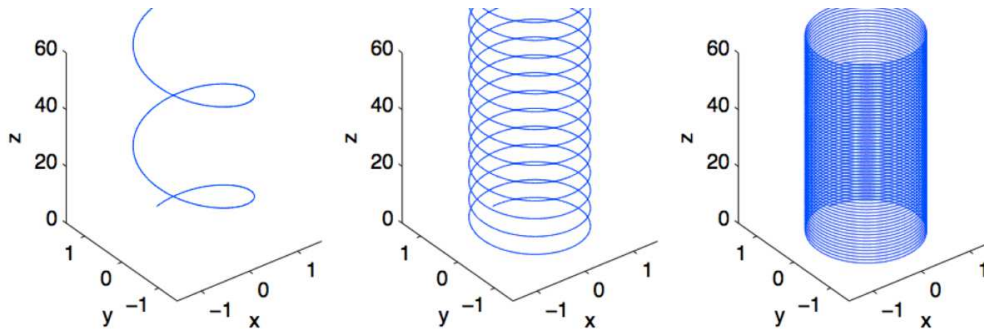


Figure 2. Mouvement d'une particule chargée positivement dans un champ magnétique orienté selon l'axe Oz, pour différentes valeurs de l'angle d'attaque (de droite à gauche, $\alpha = 10^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ et $\alpha = 80^\circ$. Les distances sont normalisées par le rayon de Larmor de la particule.

Si l'on considère le mouvement moyen d'une particule sur une échelle de temps longue par rapport à la gyropériode, ce mouvement se confond avec celui du centre de rotation G, qu'on appelle le "centre guide". Dans le cas simple considéré, le mouvement du centre guide est donc caractérisé par :

- parallèlement au champ magnétique : mouvement rectiligne uniforme $v_{G\parallel} = v_{\parallel} = \text{cste}$
- perpendiculairement au champ magnétique : aucun mouvement $v_{G\perp} = 0$

Ce dernier résultat, bien qu'évident, est important pour la suite : en l'absence de champ de force extérieur, le mouvement perpendiculaire moyen d'une particule chargée est nul ; la particule reste "attachée" à une même ligne de champ autour de laquelle elle tourne. Si on lance la particule vers la droite avec une vitesse initiale plus grande, elle n'acquerra pas davantage une vitesse moyenne vers la droite, elle aura seulement un rayon de giration plus grand (et la vitesse angulaire de rotation ne changera pas).

b) Avec un champ électrique stationnaire et uniforme ($E \neq 0$)

- *Mouvement parallèle au champ magnétique* : la force de Laplace $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ n'a pas de composante dans la direction du champ **B**. La particule ne peut donc être soumise qu'à la composante parallèle du champ électrique E_{\parallel} , si elle existe. Ceci lui fournirait alors une accélération constante inversement proportionnelle à sa masse. Ce résultat, *dans un plasma*, est un peu académique ; pratiquement, **il ne peut pas exister** une telle composante E_{\parallel} uniforme et stationnaire, sauf si elle est égale et opposée à une autre force (par exemple la pesanteur) : conformément à ce qu'on a vu dans le chapitre d'introduction, si les particules d'un plasma étaient soumises à des forces parallèles de résultante non nulle, le mouvement des électrons, plus rapide que celui des ions, mènerait à une séparation de charges qui serait aussitôt source d'un nouveau champ parallèle venant s'opposer à la force extérieure. Suivant la nature des conditions aux limites, -soit cela ramènerait à la valeur stationnaire $F_{\parallel}=0$, -soit cela produirait une oscillation à la fréquence plasma. Dans le cas $F_{\parallel}=0$, le mouvement parallèle se fait, comme dans le cas précédent, à vitesse constante.

- *Mouvement perpendiculaire* : Pour calculer cette trajectoire, on pourrait bien sûr écrire la relation fondamentale de la dynamique $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ dans le repère considéré et interpréter ainsi tous les changements de courbure locaux (voir la note de bas de page sous la figure 3). Mais on peut trouver une façon beaucoup plus rapide de procéder si on se souvient d'une part que le résultat est déjà connu en l'absence de champ électrique et d'autre part que la valeur du champ électrique dépend du repère considéré.

Si l'on calcule la trajectoire dans un repère R' se déplaçant à la vitesse $\mathbf{V}_{R'}$ par rapport au précédent, *le changement de repère*, pour des vitesses non relativistes, ne change pas le champ magnétique, mais *il change le champ électrique* par :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V}_{R'} \times \mathbf{B}$$

Parmi tous les repères possibles, il est naturel de choisir un repère où $E'=0$ puisque c'est dans celui-là que la trajectoire perpendiculaire est connue et particulièrement simple. On définit donc pour cela le repère $R'=R_m$, dit repère « magnétique », comme étant celui qui se déplace par rapport à R à la vitesse perpendiculaire \mathbf{V}_m telle que $\mathbf{E}_m = 0$, c'est à dire :

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{0} \iff \boxed{\mathbf{E} = -\mathbf{V}_m \times \mathbf{B}} \iff \boxed{\mathbf{V}_m = \frac{\mathbf{E}}{B} \times \mathbf{b}} \quad (\text{en notant } \mathbf{B} = B \mathbf{b})$$

(La vitesse parallèle de R_m ne change pas la valeur du champ électrique et on la choisit simplement nulle.)

Dans le repère R_m , la trajectoire perpendiculaire est un mouvement circulaire uniforme ; la particule n'a pas de mouvement moyen, son centre guide est immobile. Dans le repère R initial, la trajectoire est donc la combinaison d'un mouvement circulaire uniforme et du mouvement de translation à la vitesse constante \mathbf{V}_m du repère R_m . On dit que le centre guide, qui n'est donc plus immobile en présence de \mathbf{E}_\perp , subit une « dérive » à la vitesse \mathbf{V}_m .

La donnée de \mathbf{E}_\perp ou celle de \mathbf{V}_m sont équivalentes. Suivant que la valeur du champ électrique \mathbf{E}_\perp est plus ou moins grande, le mouvement circulaire trouvé précédemment "dérive" plus ou moins vite dans la direction perpendiculaire à \mathbf{E} . La trajectoire est alors décrite par une courbe *trochoïde* comme sur la figure 3 :

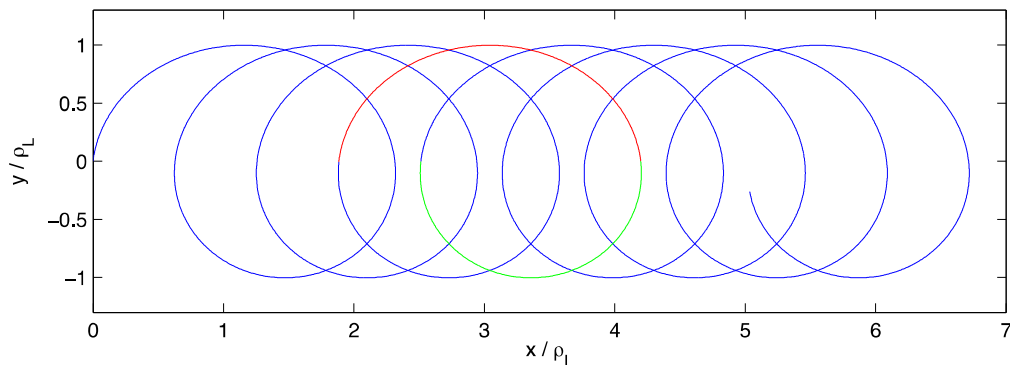


Figure 3. Projection de la trajectoire dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B} . Au mouvement de rotation uniforme (dans le repère « magnétique ») s'ajoute un mouvement de translation uniforme (mouvement de « dérive »). Dans le repère de la figure, c'est le champ électrique qui est responsable des variations de courbure⁴ : on voit que le rayon de courbure est plus grand sur la partie $y > 0$ de la trajectoire (rouge), que sur la partie $y < 0$ (vert).

Ce résultat rappelle des propriétés similaires rencontrées pour d'autres objets en rotation comme les gyroscopes : quand on applique une force dirigée suivant y , il n'en résulte pas un mouvement accéléré suivant y mais un mouvement uniforme suivant x .

⁴ Dans les parties descendantes de la trajectoire ($y < 0$), les particules sont freinées par le champ électrique E_y . Ceci diminue progressivement leur rayon de courbure (qui est proportionnel à la vitesse) jusqu'à l'extrémité basse de la trajectoire. L'inverse se produit dans les parties « montantes ». Il en résulte la dérive calculée du centre guide vers les $x > 0$.

En résumé. La vitesse du repère magnétique $\mathbf{V}_m = \frac{\mathbf{E}}{B} \times \mathbf{b}$ (où le champ électrique est nul) est une grandeur intrinsèque du champ électromagnétique. Les particules d'un plasma ne sont pas responsables de son existence. Néanmoins, les particules ont la propriété de *matérialiser* ce repère puisque (au moins pour des champs uniformes et stationnaires) c'est dans ce repère que toutes les particules, quelles que soient leur masse, leur énergie et leur charge (y compris le signe de cette charge), ont des trajectoires circulaires dans le plan perpendiculaire et donc des centres guides qui restent attachés à une même ligne de champ.

c) Force constante

Si la particule est soumise à une force constante autre qu'une force électrique (pesanteur ou autre), les résultats sont nécessairement semblables à ceux qui viennent d'être présentés, en remplaçant simplement \mathbf{E} par \mathbf{F}/q (même si l'interprétation en termes de repère magnétique ne tient évidemment plus). Pour une force perpendiculaire, on a donc encore une dérive à vitesse constante donnée par :

$$\mathbf{v}_{df} = \frac{\mathbf{F}}{qB} \times \mathbf{b}$$

Pour une force indépendante de la charge (contrairement à $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$) comme une force de gravitation, la vitesse de dérive correspondante dépend cette fois de q , en particulier de son signe. Les ions et les électrons dérivent donc dans des directions opposées, d'où l'existence de courants et éventuellement de séparations de charges (et donc de champ électrique dans la direction de la dérive).

Illustration : Dérive gravitationnelle dans les plasmas terrestres ?

On vient de voir que les particules d'un plasma magnétisé placé dans un champ gravitationnel uniforme \mathbf{g} dériveront, dans la direction dans la direction à la fois perpendiculaire à \mathbf{B} et à \mathbf{g} , avec une vitesse de module mg/qB . Cette dérive étant proportionnelle à la masse, on pourra a priori négliger la dérive des électrons par rapport à celle des ions. Calculons l'ordre de grandeur de cette dérive pour différents dispositifs. Tout d'abord dans un TOKAMAK : le champ magnétique y est de l'ordre du Tesla (5,6 T dans le cas d'ITER), et donc $v_{dg} \simeq 0,1 \mu\text{m/s}$, ce qui est bien sûr négligeable par rapport aux vitesses en jeu. Dans l'ionosphère, le module de cette vitesse est un peu plus grand : pour $B = 10^{-5}$ T, elle est de l'ordre de 0,1 m/s pour un ion de nombre de masse $A = 10$. Cela reste négligeable dans la plupart des cas.

2. CHAMPS LENTEMENT VARIABLES

Partant du résultat précédent d'une particule de vitesse $(v_{//}, v_{\perp})$, dans un champ magnétique stationnaire et uniforme, qui décrit donc une hélice dans le repère où $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. On cherche maintenant comment cette trajectoire est modifiée si le champ magnétique (ou électrique) n'est pas exactement uniforme ou s'il n'est pas exactement stationnaire. Il s'agit classiquement du premier terme d'un développement perturbatif au voisinage d'une solution connue. Le développement sera valable si la perturbation est "petite" : on verra plus tard que les conditions pour cela sont (écrites ici de façon compacte et symbolique) :

$$\partial_t \ll \omega_c, \partial_{//} \ll \frac{\omega_c}{v_{//}} \text{ et } \nabla_{\perp} \ll \frac{1}{\rho_L}$$

Où ρ_L est le rayon de Larmor. Dit autrement, les résultats obtenus sur les dérives seront valables dans le cas d'un champ lentement variable par rapport aux échelles spatiales et temporelles du mouvement cyclotron.

Nous allons voir que ces variations lentes ont deux types de conséquences que nous traiterons successivement:

i) la particule "**dérive**" dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B} au lieu de rester attachée à la ligne de champ du repère magnétique,

ii) il se produit des **échanges** d'énergie entre le mouvement **parallèle** et le mouvement **perpendiculaire** (en respectant $v_{//}^2 + v_{\perp}^2 = \text{cst}$ si le champ électrique reste nul).

a) Dérives dans un champ B non uniforme, avec $\mathbf{E} = \mathbf{0}$

On est amené à distinguer deux types de non uniformité du champ magnétique : la courbure (la direction de \mathbf{B} change, les lignes de force sont courbes) et les gradients (le module du champ magnétique change, les lignes de force convergent).

a1) **dérive de courbure** : si la direction du champ magnétique n'est pas constante, le mouvement parallèle de la particule subit une force centrifuge en raison de la courbure des lignes de force. Cette force d'inertie joue sur le mouvement perpendiculaire comme une force constante tant que le rayon de courbure est suffisamment grand ($R_c \gg v_{\parallel}/\omega_c$). Si tous les autres paramètres sont constants, cette force conduit à une dérive par la loi déjà donnée :

$$\mathbf{v}_{dc} = \frac{\mathbf{F}_c}{qB} \times \mathbf{b}$$

avec l'expression de la force centrifuge $\mathbf{F} = -\frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \mathbf{n}$ (où \mathbf{n} est la normale à la trajectoire, orientée vers l'intérieur).

Exemple : Trajectoire le long de lignes de champ circulaires

La figure 4 représente le mouvement d'une particule de charge positive dans un champ magnétique de module constant, dirigé dans la direction orthoradiale (le champ a la même direction que s'il était créé par un courant parcourant un fil d'axe Oz, dirigé « vers le haut »)⁵ : les lignes de champs sont des cercles concentriques ayant pour centre l'axe Oz. Une particule à une distance R de l'axe Oz aura donc une vitesse de dérive

$$\mathbf{v}_{dc} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qBR} \mathbf{e}_z$$

Comme illustré sur la figure 3, la trajectoire du centre guide de la particule est dans ce cas hélicoïdale. Le centre guide tourne autour de l'axe Oz avec une période égale à $2\pi R/v_{\parallel}$, et possède une vitesse constante v_{dc} le long de z. Le pas de cette hélice vaut donc

$$h = v_{dc}T = 2\pi \frac{mv_{\parallel}}{qB} = 2\pi \rho_L \cot(\alpha)$$

c'est-à-dire exactement le même pas que celui de l'hélice de la trajectoire cyclotron de la particule autour de la ligne de champ !

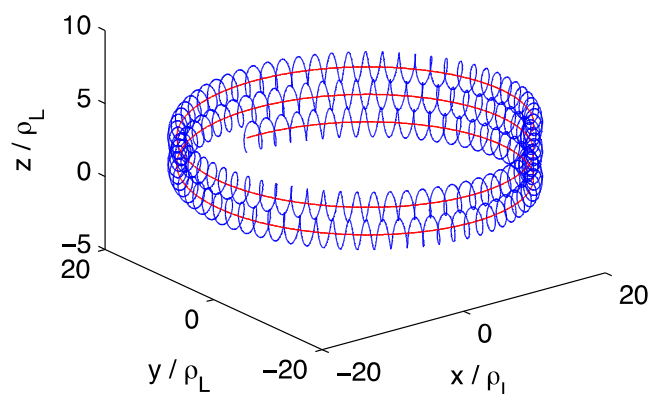


Figure 4. Trajectoire d'une particule chargée positivement (en bleu) dans un champ « toroidal » de module constant. Les longueurs sont normalisées par le rayon de Larmor de la particule. En rouge est tracée la

⁵ Ce champ magnétique, orthoradial et de module constant, n'est pas physique puisqu'il n'est pas de divergence nulle. Il est choisi uniquement pour fournir ici une illustration simple d'une trajectoire où seule la dérive de courbure intervient.

trajectoire hélicoïdale du centre guide, due à la dérive de courbure. Le rayon de courbure de la trajectoire vaut ici $R=20\rho_L$.

Illustration 1 : Confinement des particules dans un TOKAMAK

En raison de l'existence de cette dérive (et de la dérive de gradient), le confinement de particules dans un dispositif comme un TOKAMAK ne peut être efficacement effectué par un champ magnétique purement toroïdal : on aurait des pertes de particules sur les parois « haute » et « basse ». La solution à ce problème passe par l'ajout d'un champ magnétique dit poloïdal qui « torsade » les lignes de champ, et permet de compenser l'effet de cette dérive sur un tour complet (voir par exemple la page <http://www-fusion-magnetique.cea.fr/fusion/physique/trajectoire.htm>).

Illustration 2 : Courants annulaires dans les ceintures de radiation

Les ceintures de radiation de la Terre (et des autres planètes magnétisées) sont constituées de particules très énergétiques (jusqu'à environ 400 MeV pour les protons), qui sont piégées dans le champ magnétique terrestre à des altitudes variant de 1000 km à 60000 km de la surface terrestre. Ce champ magnétique étant orienté du Sud vers le Nord, et la force centrifuge vers l'extérieur de la Terre, les particules chargées positivement vont subir une dérive de courbure orientée dans le sens Est-Ouest (et donc Ouest-Est pour les particules chargées négativement). La dérive sera donc à l'origine d'un courant orienté de l'Est vers l'Ouest, dit « courant annulaire ». La vitesse de dérive étant proportionnelle à la masse des particules, ce courant est essentiellement ionique. Le courant annulaire génère un champ magnétique qui s'oppose au champ terrestre au niveau du sol (et qui au contraire, tendent à augmenter le champ effectif à l'extérieur des ceintures). Lorsque les ceintures sont très actives (lors d'orages magnétiques d'origine solaire par exemple), les courants peuvent générer des diminutions du champ magnétique au sol de l'ordre de quelques centaines de nano-Teslas.

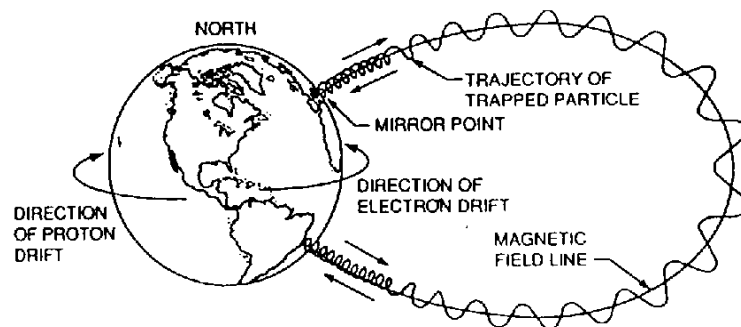


Figure 5 : Représentation schématique de la trajectoire d'une particule piégée dans les ceintures de radiations de la Terre (tirée d'un article de [Brand, 1999]).

a2) **dérive de gradient** : si on considère une courbure nulle mais un module du champ magnétique qui n'est pas constant, et si le gradient de B est suffisamment petit ($\nabla_{\perp} \ll 1/\rho_L$), la force moyenne qui apparaît cette fois est appelée "force miroir" (F_m). Il s'ensuit de la même façon une dérive moyenne donnée par :

$$v_{ac} = \frac{F_m}{qB} \times b$$

L'expression de la force miroir est : $F_m = -\mu \nabla(B)$, avec $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$. Son interprétation qualitative est donnée dans l'appendice B.

L'existence et l'expression de cette **force miroir** peuvent se démontrer simplement de la façon approchée suivante : une particule chargée qui tourne autour de son centre-guide est équivalente à un dipôle magnétique.

Classiquement, on sait que le moment magnétique d'une boucle de courant vaut, en module, $\mu = IS$, ce qui donne ici :

$$\mu = \frac{q}{T_c} \pi \rho_L^2 = \frac{q \omega_c}{2\pi} \pi \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c^2} = \frac{1/2 m v_{\perp}^2}{B}$$

Vectériellement, le moment magnétique du dipôle est opposé à \mathbf{B} : on a vu qu'une particule chargée positivement tourne dans le sens rétrograde (ou "gauche") autour de \mathbf{B} . Il faut donc écrire :

$$\boldsymbol{\mu} = -\mu \mathbf{b}$$

L'énergie d'interaction entre le dipôle et le champ \mathbf{B} s'écrit $W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \mu B$ et la force miroir est celle qui dérive de cette énergie : $\mathbf{F}_m = -\nabla(\mu B)$, c'est à dire $\mathbf{F}_m = -\mu \nabla(B)$ à condition que μ soit constant, ce qui va être démontré plus loin.

Commentaire sur le signe moins de $\boldsymbol{\mu} = -\mu \mathbf{b}$: Le mouvement cyclotron de chaque particule du plasma crée un champ \mathbf{B}' dirigé en sens opposé à \mathbf{B} . Elle tend donc à diminuer le champ dans lequel elle tourne et qui est la cause de son mouvement de giration. On peut donc s'attendre à ce que, dans certaines conditions, le plasma soit diamagnétique.

b) Dérive dans un champ E variable

b1) **Champ E non stationnaire : dérive de polarisation.** Si, dans un champ magnétique constant, il existe un champ électrique uniforme mais non stationnaire ($\dot{\mathbf{E}} = \partial_t(E) \neq 0$), on peut à chaque instant l'annuler par un changement de repère à la vitesse de dérive électrique \mathbf{v}_{dE} , mais comme cette vitesse n'est pas constante au cours du temps, il faut prendre en compte la force d'inertie correspondant à cette accélération $\mathbf{F}_p = -m \frac{\dot{\mathbf{E}}}{B} \times \mathbf{b}$. Il en découle une dérive supplémentaire colinéaire à $\dot{\mathbf{E}}$:

$$\mathbf{v}_{dp} = \frac{1}{\omega_c} \frac{\dot{\mathbf{E}}_{\perp}}{B} = \frac{m}{q} \frac{\dot{\mathbf{E}}_{\perp}}{B^2}$$

dite dérive "de polarisation". L'expression ci-dessus montre que la vitesse de dérive est en sens opposé pour les ions et les électrons : elle sera donc à l'origine d'un courant volumique dans le plasma, appelé « courant de polarisation ». Puisque la vitesse de dérive est proportionnelle à la masse (tout comme la dérive de courbure), ce courant sera essentiellement porté par les ions du plasma. Son expression vaut

$$\mathbf{j}_p \simeq \frac{nM}{B^2} \frac{d\mathbf{E}_{\perp}}{dt}$$

Ce courant est à l'origine d'une polarisation du plasma (d'où son nom) induite par le passage d'une onde électromagnétique dans celui-ci, et donc d'une valeur importante de la constante diélectrique du plasma dans la direction perpendiculaire au champ B .

La figure 6 présente le mouvement d'une particule de charge q positive dans un champ magnétique constant dirigé suivant l'axe Oz , et un champ électrique oscillant dans le temps $E = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_x$. L'amplitude du champ est choisie telle que $qE = 1$, et sa fréquence telle que $\omega / \omega_c = 0.1$.

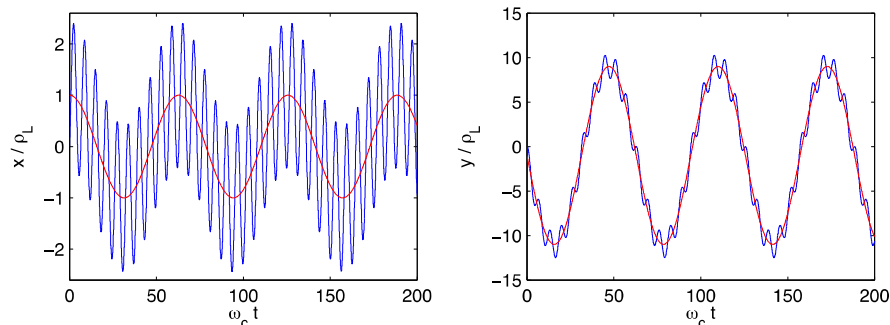


Figure 6. Evolution de la position de la particule (cf texte) en fonction du temps. Les distances sont normalisées par rapport au rayon de Larmor, et les temps par rapport à ω_c^{-1} . Les courbes rouges présentent la trajectoire du centre-guide.

La particule n'ayant pas de vitesse suivant z , la trajectoire est entièrement comprise dans le plan xOy . Elle comporte trois composantes : d'une part le mouvement cyclotron, d'autre part la dérive en champs croisés, dirigée selon y , et enfin la dérive de polarisation, selon x . La figure 6 illustre ces différentes composantes du mouvement.

La figure 7 représente la même particule lancée dans le même champ, mais cette fois la pulsation est choisie telle que $\omega = \omega_c$: on voit que la nature du mouvement n'est pas du tout la même. Le champ électrique entre ici en résonance avec le mouvement de giration de la particule (on parle de *résonance cyclotron*).

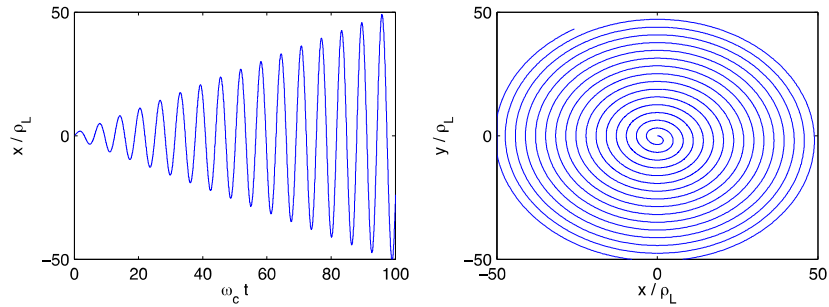


Figure 7. Trajectoire d'une particule en résonance avec le champ électrique. Le travail du champ électrique n'étant pas nul en moyenne sur une rotation, le rayon de Larmor de la particule augmente linéairement avec le temps. On observe donc une trajectoire spirale dans le plan xOy .

Il est donc important de se souvenir que la décomposition du mouvement en dérives n'est valable que dans l'approximation de variations lentes des grandeurs physiques par rapport à la gyropériode des particules considérées (ou de variations spatiales faibles sur la distance du rayon de Larmor).

b2) **Champ E non uniforme.** Si c'est dans l'espace et non dans le temps que la vitesse de dérive électrique varie, la prise en compte de cette variation mène à une modification de la dérive électrique effective qui est d'ordre 2 dans un développement en rayon de Larmor fini de la trajectoire. Si on considère par exemple une variation à une dimension selon x et un rayon de Larmor ρ_L petit par rapport à l'échelle des variations de \mathbf{E} avec x , on peut développer autour de la position moyenne au centre guide (indice 0) :

$$\mathbf{F} \approx q\mathbf{E}(x = \rho_L \sin \omega_c t) \approx q(\mathbf{E}_0 + \rho_L \sin \omega_c t \mathbf{E}'_0 + \rho_L^2 \sin^2 \omega_c t \mathbf{E}''_0 / 2 + \dots)$$

où \mathbf{E}'_0 et \mathbf{E}''_0 sont les dérivées première et seconde de \mathbf{E} par rapport à x . On voit que cette force a une valeur moyenne non nulle sur une période. Celle-ci est responsable d'une modification de la dérive électrique:

$$\langle \mathbf{F} \rangle \approx q(\mathbf{E}_0 + \rho_L^2 \mathbf{E}''_0 / 4 + \dots) \Rightarrow \mathbf{v}_{dE}^* = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{qB} \times \mathbf{b}$$

Cette modification n'apparaît pas dans les théories les plus courantes des dérives (qui s'arrêtent à l'ordre 1 en ρ_L). Elle a pourtant son importance dans certains phénomènes d'instabilités qu'on appelle justement "instabilités de dérive" et qu'on rencontre en particulier dans les problèmes de confinement magnétique (tokamaks). Avec ou sans ce terme correctif, la vitesse de dérive électrique reste évidemment indépendante de la charge électrique (q se simplifie).

c) Premier invariant adiabatique

Nous revenons au cas d'un champ magnétique lentement variable pour lequel nous avons calculé la vitesse de dérive au (a). Il est possible de montrer (le cadre général de cette démonstration est présenté dans la partie 3 de ce chapitre) que la trajectoire d'une particule chargée vérifie dans ce cas certaines propriétés d'invariance (ou

de *quasi-invariance*). Un résultat important est que le rapport suivant est approximativement conservé tout au long de la trajectoire

$$\boxed{\frac{v_{\perp}^2}{B} = \text{cste}}$$

L'existence de ce premier invariant approché, dit invariant "adiabatique", du mouvement constitue un résultat général : pour des variations "lentes", la vitesse perpendiculaire d'une particule varie comme la racine du module du champ magnétique. Cette variation lente peut être réellement temporelle (comme dans le calcul qui est effectué en TD) ou bien être une variation spatiale explorée par la particule au long de sa trajectoire. Dans le second cas, on peut se ramener à un calcul identique, à la condition toutefois de faire un changement de repère qui tienne compte des différentes vitesses de dérive.

On se souviendra du résultat suivant : lorsque le module du champ magnétique B augmente, la vitesse de rotation $\omega \approx -\omega_c$ augmente comme B (en valeur absolue) alors que le rayon $r \approx \rho_L$ diminue comme $B^{-1/2}$; la vitesse v_{\perp} augmente donc comme $B^{1/2}$. En l'absence de champ électrique parallèle, la conservation de l'énergie de la particule s'écrit $v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = \text{cste}$. Lorsque B augmente, la vitesse parallèle va donc diminuer.

d) Quelques conséquences de la conservation du premier invariant adiabatique

- Moment magnétique et description "centre-guide":

Comme nous l'avons déjà vu, le moment magnétique associé au mouvement cyclotron d'une particule autour de son centre-guide a pour module : $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$. Le résultat précédent implique donc qu'il est constant au cours du mouvement. Ceci fonde la description "centre-guide" des particules dans un milieu magnétisé : le mouvement d'une particule sur des échelles de temps longues par rapport à la période de giration peut se calculer comme celui d'une particule ponctuelle située au centre guide et munie d'un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ antiparallèle à \mathbf{B} . C'est l'existence de ce moment magnétique qui est à l'origine du comportement diamagnétique d'un plasma à basse fréquence.

Remarque : La description centre-guide est simple et fructueuse. Elle contient néanmoins un piège classique dans lequel il faut éviter de tomber. Quand on calcule un **courant** dans un plasma, il faut retenir que le mouvement des centres-guides des ions et des électrons n'est pas la seule contribution au courant. Elle est même dans de nombreuses situations négligeable devant le courant dit « de magnétisation », dû au **mouvement des particules autour du centre guide** (et donc lié au moment magnétique). Ce fait est illustré sur la figure 8 : le mouvement des centres guides est nul, mais la densité de particules est plus grande à gauche qu'à droite : on peut voir qu'il existe bien un courant qui provient des mouvements de rotation, simplement par le fait qu'au centre il y a plus de particules allant vers le bas que de particules allant vers le haut.

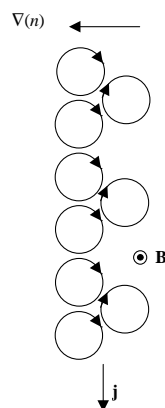


Figure 8. Bilan de courant dans un gradient de densité ionique sans vitesse fluide

- flux magnétique :

Si on calcule le flux magnétique à travers la surface limitée par la trajectoire de la particule sur un tour cyclotron, on trouve :

$$\phi = BS = B\pi \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c^2} = \pi \frac{m^2 v_{\perp}^2}{q^2 B}$$

Ce flux, proportionnel à μ , est donc également constant au cours du mouvement⁶. Conséquence importante : dans le cas d'un champ magnétique stationnaire non uniforme exploré par la particule au long de son mouvement parallèle, ceci montre que la particule a une trajectoire qui s'enroule autour d'un tube de flux magnétique (dans le repère à la vitesse de dérive) en gardant toujours un rayon égal à celui du tube (figure 9).

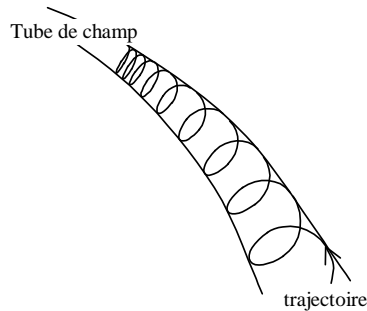


Figure 9. La trajectoire s'enroule autour d'un tube de force du champ magnétique

e) Exemples

- $\dot{\mathbf{B}} = \partial_t(\mathbf{B})$: variation purement temporelle. La conservation de μ constitue l'effet « *bêtatron* »: si on augmente le champ magnétique dans une machine, l'énergie perpendiculaire des particules augmente d'autant (accélérateurs de particules).

- $\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{w}_{\parallel} \cdot \nabla(\mathbf{B})$: variation spatiale explorée par la particule dans son mouvement parallèle. La particule circule dans une "bouteille magnétique", c'est à dire sur un tube de force convergent. Quand elle se dirige vers des B croissant, son énergie perpendiculaire augmente. En l'absence de champ électrique ou de toute autre force, ceci se fait à énergie constante ($v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = \text{cste}$): l'énergie parallèle doit donc diminuer. On a donc un mouvement perpendiculaire qui accélère et un mouvement parallèle qui ralentit. Ce transfert de l'énergie parallèle vers l'énergie perpendiculaire se fait sous l'effet de la force dite "force miroir" (cf appendice B) qui s'exerce sur le dipôle magnétique associé à la particule dans la théorie centre guide. Sous l'effet de cette force, une particule se dirigeant initialement vers les B croissant ralentit, s'arrête en un point qu'on appelle son « *point miroir* » (où $v_{\parallel}=0$ et où toute l'énergie est donc sous forme d'énergie cinétique perpendiculaire) et repart en sens opposé.

⁶ *Interprétation qualitative de la conservation du flux* : Φ est équivalent au flux à travers une boucle de courant ; s'il venait à augmenter, il apparaîtrait une f.e.m. induite dans cette boucle $e_i = -d_t(\Phi)$. Le champ électrique correspondant \mathbf{E}_i décélérerait le mouvement perpendiculaire de la particule et donc diminuerait le rayon de Larmor ; ceci diminuerait le flux qui était censé augmenter. C'est ainsi que Φ peut rester constant.

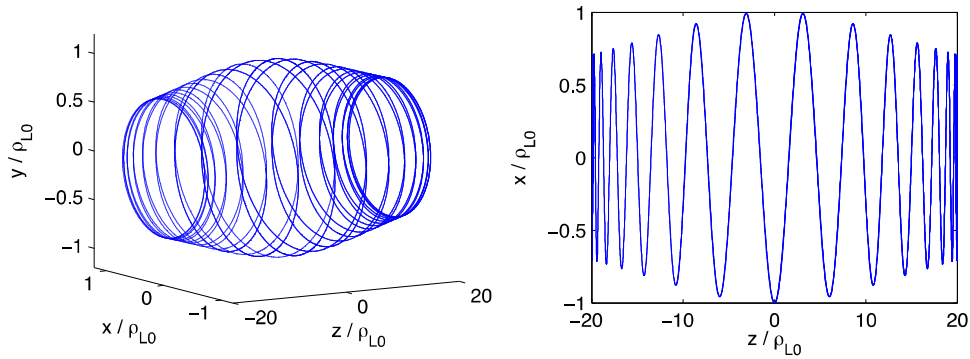


Figure 10 : trajectoire d'une particule dans un piège à miroir magnétique.

Les phénomènes qui viennent d'être décrits se rencontrent dans beaucoup de domaines différents de la physique des plasmas, depuis les machines à confinement magnétique destinées à la fusion nucléaire (cf. les "machines à miroir" – figure 10) jusqu'aux plasmas naturels. Dans la magnétosphère terrestre par exemple, les particules font des allers et retours entre deux points miroirs situés dans chaque hémisphère plus ou moins haut au-dessus de l'ionosphère ; la plupart d'entre elles restent ainsi "piégées" dans la magnétosphère (elles effectuent de plus un mouvement de dérive plus lent autour de la Terre en raison de la courbure des lignes de force et des gradients de B).

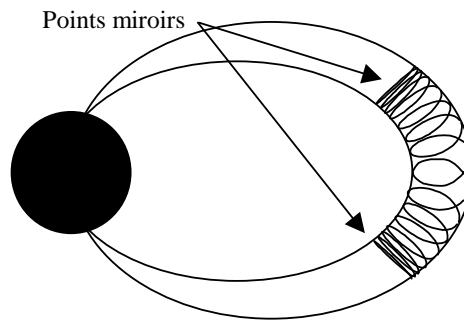


Figure 11. Trajectoire d'une particule dans le champ magnétique terrestre (cf Fig.5)

L'exemple magnétosphérique est particulièrement riche pour comprendre la notion d'invariants adiabatiques. Il est brièvement décrit dans l'appendice C.

3. PETITES PERTURBATIONS D'UN MOUVEMENT PERIODIQUE

Lorsque le mouvement cyclotron dans un champ uniforme et stationnaire est perturbé par de petits écarts à l'uniformité ou à la stationnarité, nous venons de voir que cette perturbation modifie sa trajectoire initialement périodique en la rendant "quasi-périodique" et en conservant approximativement l'invariant adiabatique μ . Ceci n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général : étant donné un système mécanique qui possède une solution périodique (typiquement un pendule), comment est modifiée la solution si on fait varier les paramètres du système (par exemple la longueur du pendule) de façon lente par rapport à la période ? On peut montrer que le comportement précédent constitue une règle générale : la solution devient quasi-périodique et il est possible de caractériser l'évolution séculaire en déterminant un invariant approché. Ceci définit de façon générale la notion d'« invariant adiabatique ».

a) Résultats généraux (pour un système hamiltonien)

Un système hamiltonien est un système sans dissipation : l'énergie totale est un invariant exact. Supposons qu'un tel système donne lieu à un mouvement périodique de période T . On appellera q la coordonnée cyclique du mouvement périodique et p_q le moment conjugué de q pour le Hamiltonien H du système. [Remarque : le résultat

qui suit est écrit en considérant un seul degré de liberté ; dans le cas contraire, il faudrait faire une somme sur les degrés de liberté]. Si on perturbe lentement ce système ($d_t \approx 1/\tau \ll 1/T$), on peut montrer, par des calculs standard mais délicats de mécanique hamiltonienne que nous ne présentons pas ici (changements de variables "canoniques", etc..., cf. par exemple tous les calculs de mécanique céleste) que la quantité

$$J_q = \int_{T_q} p_q dq$$

est conservée au premier ordre en T_q/τ .

On montre également, au même ordre en T_q/τ , que cet invariant, dit "adiabatique" peut aussi s'écrire sous la forme d'une intégrale sur le temps :

$$J_q = \int_{T_q} W_q dt = \langle W_q \rangle_{T_q} T_q$$

où W_q est l'énergie associée à la coordonnée cyclique q . Cette forme commode est souvent directement utilisable pour trouver rapidement les variations séculaires d'oscillateurs perturbés : variation de l'orbite d'une planète autour d'une étoile de masse lentement variable, perturbation de la trajectoire d'une particule piégée dans le puits de potentiel d'une onde lentement croissante ou décroissante, etc...

En ce qui concerne le problème général des invariants adiabatiques, nous nous contenterons ici des quelques résultats qui viennent d'être présentés sans démonstration. Mais pour bien comprendre la puissance de ces concepts, montrons en l'utilisation sur un exemple très complet.

b) Un exemple avec trois invariants adiabatiques

Parmi les très nombreuses configurations magnétiques où la notion d'invariant adiabatique est utile, nous allons décrire la trajectoire d'une particule piégée dans le champ magnétique terrestre (cf. figures 5 et 11).

- b1) **Mouvement cyclotron** : Le premier mouvement périodique d'une particule est le mouvement cyclotron. Il est lentement perturbé lorsque celle-ci se déplace sur sa ligne de champ vers des champs de plus en plus forts (en perdant de l'altitude).

$$\langle W_{\perp} \rangle_{T_c} = 1/2 m v_{\perp}^2 \text{ et } T_c = 2\pi m/qB. \implies J_1 = \frac{2\pi m m v_{\perp}^2}{q 2B}$$

A un coefficient numérique près, la conservation de J_1 redonne bien la conservation du moment magnétique μ .

- b2) **Mouvement de rebond** : Une fois moyenné sur la période cyclotron, la trajectoire de la particule (c'est à dire maintenant de son centre-guide) décrit un mouvement d'aller et retour le long de la ligne de champ, entre les deux points miroirs. C'est un nouveau mouvement périodique, de période T_b ; celui-ci se trouve lentement perturbé lorsque, au cours de son mouvement de dérive, la particule explore des lignes de force de longueurs différentes. Pour ce nouveau mouvement quasi-périodique, les formules précédentes donnent un second invariant adiabatique :

$$J_2 = 1/2 m \langle v_{\parallel}^2 \rangle T_b, \text{ (} T_b \text{ étant la période de rebond).}$$

Conséquence : si une particule est convectée (par un champ électrique) vers des lignes de force plus courtes (points miroirs plus proches), la période de rebond diminue et la valeur quadratique moyenne de la vitesse parallèle $\langle v_{\parallel}^2 \rangle$ augmente :

$$T_b \text{ décroît} \implies \langle v_{\parallel}^2 \rangle \text{ croît.}$$

Ce phénomène d'accélération parallèle d'une particule piégée entre deux miroirs qui se rapprochent s'appelle « **accélération de Fermi** » du 1^{er} ordre. C'est un phénomène efficace et important en astrophysique (on explique comme cela l'existence de certains rayons cosmiques qui sont parmi les particules les plus énergétiques de l'Univers). On décrit souvent ce phénomène de façon imagée en parlant d'une balle de ping-pong faisant des allers-retours entre deux raquettes qui se rapprochent : les raquettes fournissent alors de l'énergie à chaque choc.

- b3) **Mouvement de dérive équatoriale** : Une fois son mouvement moyenné sur la période de rebond, la particule (ou plutôt sa « coquille magnétique ») décrit encore un mouvement de dérive autour de la Terre. Pour certaines de ces particules, ce mouvement autour de la Terre est à nouveau un mouvement périodique de période T_d (cf. les particules énergétiques des ceintures de radiations dites "ceintures de Van Allen" à 3 ou 4 rayons terrestres). Ces mouvements peuvent à leur tour être perturbés, par exemple par des variations de la pression du vent solaire sur la magnétosphère. Si ces perturbations se font sur des échelles de temps nettement plus longues que la période de rotation (ce qui n'est pas évident en général), on peut encore calculer un invariant adiabatique $J_3 = \Phi$, qui est le flux du champ magnétique terrestre à travers la trajectoire de dérive.

Des ordres de grandeur, pour la magnétosphère terrestre, des différents mouvements périodiques sont donnés dans l'appendice C. On verra que ces ordres de grandeur sont en général suffisamment bien séparés pour que chaque mouvement puisse être considéré comme une perturbation lente du précédent. Ceci n'est toutefois pas toujours vrai pour les perturbations du dernier (mouvement de dérive) qui peuvent se faire sur des échelles de temps du même ordre de grandeur que la période (4 h).

A la fin de ce chapitre, nous avons donc appris à déterminer les trajectoires individuelles des particules dans des champs imposés réalistes. Pour faire réellement de la physique des plasmas, il reste encore à savoir en déduire l'évolution des fonctions de distribution (cet aspect statistique est l'objet du chapitre suivant) en déduire les moments que sont les densités de charge et de courant et boucler avec les équations de Maxwell.

APPENDICE A. « VITESSE » DU CHAMP MAGNETIQUE

On a vu que l'existence du repère magnétique R_m ne doit rien aux trajectoires de particules : elle vient entièrement des équations de Maxwell : un champ magnétique uniforme n'est purement magnétique ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$) que dans un seul repère R_m ; dans tous les autres repères, il est accompagné d'un champ électrique $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ lié à la vitesse \mathbf{V}_\perp du repère considéré par rapport à R_m . Dans un repère quelconque, on peut donc parler sans honte de "vitesse du champ magnétique" pour parler de la vitesse à laquelle se déplace ce "repère magnétique" où $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Pour des champs stationnaires et uniformes, on peut dire que le champ magnétique "bouge" dès que $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$, même si une photo des lignes de champ à deux instants successifs donne strictement la même topographie des lignes de force (ce n'est pas plus difficile que de définir le mouvement d'un solide homogène) : autrement dit, il faut être conscient que **le champ électrique "induit" par le mouvement existe même si $\partial_t(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$** . Ce résultat, qui peut paraître un peu choquant sous cette forme, est pourtant banal : chacun sait qu'un bout de fil dans un champ magnétique uniforme n'est le siège d'aucune f.e.m. quand il est "immobile" alors qu'une f.e.m. apparaît dès qu'il existe un mouvement relatif entre la source du champ et le fil (notion de "flux coupé") : ceci signifie bien que le fil "sait" si le champ est "immobile" ou non, même si \mathbf{B} est uniforme et stationnaire.

Le paradoxe apparent de ce résultat ne s'éclaire que si l'on réfléchit au problème des sources du champ : comment se fait-il qu'il existe un repère où la densité volumique de charge est nulle (pour un problème stationnaire, $\mathbf{E} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \rho = 0$), alors que cette densité est non nulle dans tous les autres repères qui possèdent une vitesse \mathbf{V}_\perp par rapport à ce repère particulier ($\mathbf{E}' \neq \mathbf{0} \Rightarrow \rho' \neq 0$) ? C'est qu'effectivement un corps qui est neutre dans un repère n'est en général pas neutre dans les autres quand le système inclut des courants : par les formules relativistes de changement de repère, $\rho' \neq 0$ dès qu'il existe un courant électrique \mathbf{j} et que la vitesse \mathbf{V} du changement de repère possède une composante parallèle au courant ($\mathbf{j} \cdot \mathbf{V} \neq 0$). Cet effet est bien fondamentalement relativiste (il repose sur les changements de volume), mais **il existe à l'ordre zéro en V/c** (comme celui qui change \mathbf{B} en \mathbf{E}). Si donc on crée un champ magnétique dipolaire grâce un courant $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ circulant dans un conducteur neutre ($\rho = 0$), on ne crée pas de champ électrique dans ce repère ; mais il existe un champ électrique dans tous les autres repères.

Ces résultats, présentés pour des champs uniformes, peuvent également s'étendre à des champs non uniformes (raisonnements locaux). Une conséquence parmi d'autres : le « **champ électrique de corotation** » des planètes magnétisées. Une planète conductrice qui crée un dipôle magnétique est localement neutre dans le repère qui tourne avec elle. Il en découle que le champ magnétique dipolaire qu'elle crée "tourne" avec la planète (au sens précédent du mouvement d'un champ magnétique), et qu'une particule située dans l'espace à quelque distance de là "connaît" ce mouvement sans intervention d'aucune collision mécanique, simplement sous l'effet du champ électrique. Ce champ est alors dit "de corotation" puisqu'il amène toutes les particules (plus exactement leurs centres-guides) à suivre le mouvement de rotation de la planète.

APPENDICE B : LA FORCE MIROIR

L'introduction de la notion de « force miroir » est utile pour la compréhension intuitive des phénomènes. Elle a été rencontrée à deux reprises dans ce chapitre : d'une part pour interpréter l'existence de la dérive de gradient, et d'autre part pour interpréter l'existence des points miroirs.

Dans ce cas d'un tube de force convergent, l'interprétation de la force miroir est immédiate (figure 12). La petite composante $\delta\mathbf{B}$ orientée vers l'intérieur du tube correspond à la convergence de ce tube. La force de Laplace supplémentaire associée à cette composante est orientée vers le bas : c'est la force miroir.

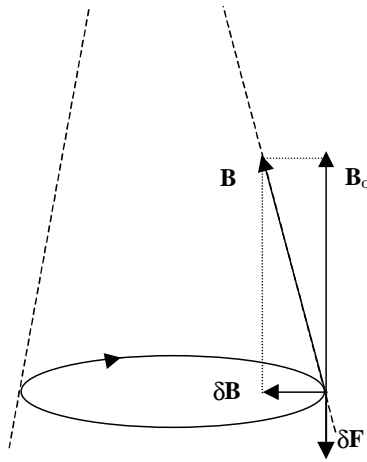


Figure 12. Force miroir $\delta\mathcal{F}$

APPENDICE C. MOUVEMENTS DE PARTICULES DANS LA MAGNETOSPHERE

L'exemple magnétosphérique est un exemple privilégié pour bien comprendre les mouvements de particule dans un champ magnétique donné. Voici quelques indications sur cet exemple.

Points miroirs.

La position des points miroirs est facile à calculer : pour une particule d'angle d'attaque α , on a $\sin \alpha = v_{\perp} / v \propto B^{1/2}$ puisque le module w est constant en l'absence de champ électrique (énergie cinétique constante). On arrive au point miroir lorsque $\alpha = \pi/2$ ($v_{\parallel} = 0$); si on connaît l'angle d'attaque et le champ magnétique à l'équateur α_{eq} et B_{eq} , le point miroir se situera là où le champ magnétique vaut $B = B_{\text{eq}} / \sin^2 \alpha_{\text{eq}}$. Il sera donc d'autant plus bas que la particule part de l'équateur avec un angle d'attaque petit.

Cône de perte

Toutes les particules qui ont à l'équateur un angle d'attaque plus petit qu'un certain angle d'attaque critique α_c descendent si bas qu'elles entrent en collision avec les particules de la partie dense (et donc collisionnelle) de la haute atmosphère ; elles ne remontent pas et sont donc "perdus". Ceci concerne toutes les particules dont la vitesse est dans le cône d'angle au sommet α_c , qui est pour cette raison appelé "cône de perte" (figure 13a). Les observations des fonctions de distribution magnétosphériques montrent effectivement que cette région de l'espace des vitesses est généralement vide (figure 13b).

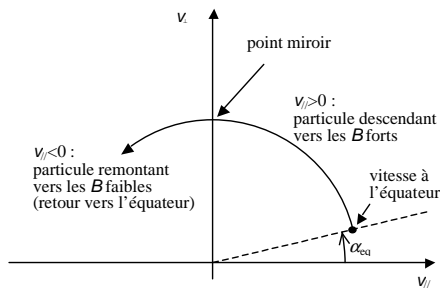


Figure 13a. Trajectoire d'une particule dans le plan v_{\parallel} - v_{\perp} .

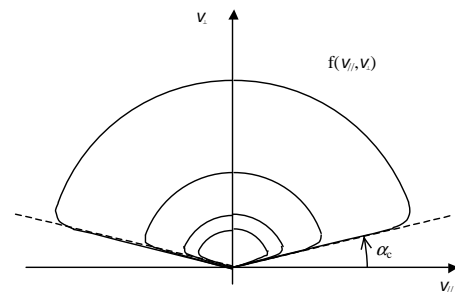


Figure 13b. Fonction de distribution avec cône de perte (isocontours)

Ordres de grandeurs des échelles de temps pour la magnétosphère terrestre

Pour des particules de 50 keV à $L = 3R_E$ (ceintures de Van Allen), on a :

Mouvement	électrons	protons
cyclotron	$T_c = 50 \mu\text{s}$ (20 kHz)	$T_c = 0.1 \text{ s}$ (10 Hz)
rebond	$T_b = 1 \text{ s}$	$T_b = 50 \text{ s}$
dérive	$T_d = 4 \text{ h}$	$T_d = 4 \text{ h}$

Une conséquence des deux premiers invariants : l'anisotropie de température dans la magnétosphère.

Quand on suit les particules venant de la queue de la magnétosphère et convectant en direction de la Terre, leurs énergies perpendiculaire et parallèle varient en respectant respectivement les premier et second invariants. Ceci amène l'énergie perpendiculaire à augmenter plus vite que l'énergie parallèle, car :

v_{\perp}^2 varie comme B , c'est à dire environ comme r^{-3} si le champ est à peu près dipolaire.

v_{\parallel}^2 varie comme T_b^{-1} , c'est à dire environ comme L_b^{-2} , soit à peu près r^{-2} .

On voit ainsi que v_{\perp}^2 varie plus vite que v_{\parallel}^2 (la démonstration est approximative et incomplète, mais le résultat est réel). Cette différence entre les énergies cinétiques parallèle et perpendiculaire des particules se retrouve entièrement sous forme d'agitation thermique (pas de vitesse dirigée importante), et il s'ensuit une anisotropie notable des températures dans la magnétosphère : $T_{\perp} > T_{\parallel}$.

CHAPITRE 3. THEORIE CINETIQUE DES PLASMAS

La théorie cinétique a pour but de déterminer l'évolution des fonctions de distribution des particules dans le plasma, permettant une approche plus globale du milieu que la description des trajectoires des particules individuelles vues précédemment. Dans ce chapitre, nous introduisons les outils statistiques de base que sont les équations cinétiques.

1. FONCTION DE DISTRIBUTION D'UN PLASMA

La notion de fonction de distribution est introduite en physique statistique. La définition dans un plasma ne diffère pas de celle dans un gaz parfait par exemple. Néanmoins les propriétés d'un plasma de pouvoir être par exemple sans collisions, ou d'être fortement dominé par les champs électrique et magnétique amènent un certain nombre de spécificités qui méritent d'être étudiées. Par ailleurs la description cinétique d'un plasma est un outil théorique et numérique puissant pour analyser les phénomènes physiques.

a) Définition

La description la plus simple qu'on puisse faire d'un plasma est de le considérer comme un ensemble de particules individuelles. Pour décrire l'évolution du système, on applique le principe fondamental de la dynamique à chacune. L'intégration des équations différentielles obtenues permet de calculer la trajectoire de chacune. Le problème n'est cependant pas complètement simple puisque parmi les forces qui agissent sur chaque particule, la force électromagnétique joue un rôle important et que cette force dépend des positions des particules par le biais des densités de charge et de courant. L'autre complication vient évidemment du nombre important de particules. On peut tenter de caractériser directement l'ensemble de N particules de la manière suivante :

On caractérise une particule par une densité numérique $\varphi_o^{(i)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ définie dans tout l'espace. La densité $\varphi_o^{(i)}$ est une fonction scalaire du temps et de la position dans l'espace des phases (espace à 6 dimensions des positions physiques et des vitesses) ; elle est définie par le fait qu'elle est nulle partout sauf là où se trouve la particule d'indice i , et que son intégrale sur \mathbf{x} et \mathbf{v} est égale à 1 (c'est à dire au nombre de particules). On pourrait par exemple modéliser cette fonction de densité pour chaque variable par un créneau de largeur ε et de hauteur $1/\varepsilon$. On se contentera, autant que possible, d'une description en termes de particules ponctuelles ($\varepsilon \rightarrow 0$) ; dans ce cas, la densité n'est pas une fonction ordinaire, mais elle peut s'exprimer par des distributions de Dirac :

$$\varphi_o^{(i)}(t, \boldsymbol{\chi}) = \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)]$$

Considérons maintenant la « population » constituée d'un ensemble de N particules. On peut à nouveau définir une densité numérique pour la population

$$\varphi_N = \prod_{i=1}^N \varphi_o^{(i)}$$

Il s'agit encore d'une densité numérique, mais dans un espace à $6N$ dimensions, c'est à dire en un nombre N de positions $\boldsymbol{\chi}_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1\}$, $\boldsymbol{\chi}_2 = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2\}, \dots, \boldsymbol{\chi}_N = \{\mathbf{x}_N, \mathbf{v}_N\}$ égal au nombre de particules. Comme précédemment, elle est normée (intégrale égale à 1) mais elle n'est non nulle que si les N points $\boldsymbol{\chi}_i$ correspondent simultanément aux positions exactes des N particules.

La donnée de φ_N contient évidemment beaucoup plus d'informations qu'on ne peut en manipuler. Il faut réduire le nombre d'informations en considérant la densité en un point $\boldsymbol{\chi}$ (i.e. dans un espace des phases de dimension 6) due à n'importe laquelle des N particules :

$$\varphi_1(t, \boldsymbol{\chi})$$

Elle s'obtient par intégration de la densité précédente sur les $N - 1$ positions restantes. Elle n'est non nulle que s'il existe une particule en chaque position $\boldsymbol{\chi}$. Mais elle ne s'exprime plus comme un simple produit des $\varphi_o^{(i)}$: il y a sommation sur un grand nombre de combinaisons, puisque chaque particule peut se trouver en chacun

des point. La sommation sur toutes les combinaisons est évidente et donne simplement la somme des densités de chacune des particules :

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^N \varphi_o^{(i)}$$

La Figure 1 illustre ce à quoi pourrait ressembler cette densité numérique ramenée à une fonction d'une variable position, en intégrant sur la vitesse. C'est une grandeur extrêmement fluctuante, de même que le champ électrique associé. Le champ est renforcé quand on passe à proximité d'une particule. Ces fluctuations très locales ne sont pas utiles à connaître si l'on veut comprendre le comportement global du plasma. Il est beaucoup plus simple et opérationnel de prendre une approche statistique et de remplacer une description exacte par une description probabiliste. On définit donc la fonction de distribution, comme le nombre moyen de particules dans un petit volume de l'espace des phases autour d'une position et d'une vitesse données, $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$.

$$dn = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{v} d^3\mathbf{x}$$

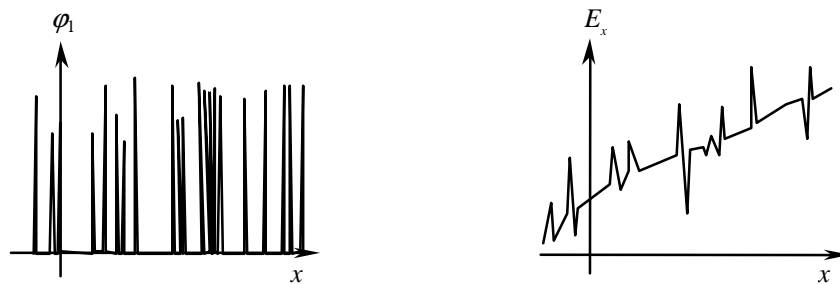


Figure 1. La densité exacte et le champ électrique qui s'en déduit sont des quantités très fluctuantes.

La fonction de distribution est une fonction à 7 variables, 3 variables dans l'espace des positions, 3 dans l'espace des vitesses. Il faut noter que dans un plasma il y a nécessairement plusieurs populations, au moins une de charges positives et une de charges négatives, il y a donc autant de fonctions de distributions que de populations.

Si on veut déduire de la fonction de distribution la densité de particules en un point de l'espace on intègre sur toute la distribution en vitesse $n(t, \mathbf{x}) = \iiint f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}$, où $d^3\mathbf{v}$ est un élément de volume dans l'espace des vitesses. On voit qu'il y a moins d'information dans cette fonction de distribution que si on connaissait la position exacte de toutes les particules, mais il y en a beaucoup plus que si on ne connaît que la densité des particules en un point de l'espace. Deux fonctions de distribution très différentes peuvent avoir la même aire sous la courbe et donc la même densité (Figure 2).

Les autres grandeurs fluides se déduisent de f , ce sont les moments d'ordre 0, densité, d'ordre 1, vitesse, etc..... (voir chapitre 1). On voit sur la Figure 2, une fonction de distribution d'une population qui a une vitesse moyenne (à gauche) et une fonction de distribution qui correspond à la superposition d'une population au repos avec un faisceau de particules qui a une vitesse moyenne.

b) Mesure expérimentale de la fonction de distribution

La fonction de distribution n'est pas une notion théorique éthérée : si on place un détecteur de particules sur une sonde spatiale, ce qu'on mesure n'est pas très éloigné de la fonction de distribution. Parmi les instruments de mesure des particules dans un plasma on peut citer les sondes de Langmuir qui donnent accès à la densité et à la température du plasma, les coupes de Faraday qui mesure le courant et enfin les analyseurs électrostatiques qui mesurent le flux de particules à une énergie donnée et dans une direction donnée. On peut facilement relier le flux mesuré par un analyseur électrostatique à la fonction de distribution en vitesse et donc obtenir la fonction de distribution à partir de ses mesures (Figure 3). On précise le lien ci-dessous.

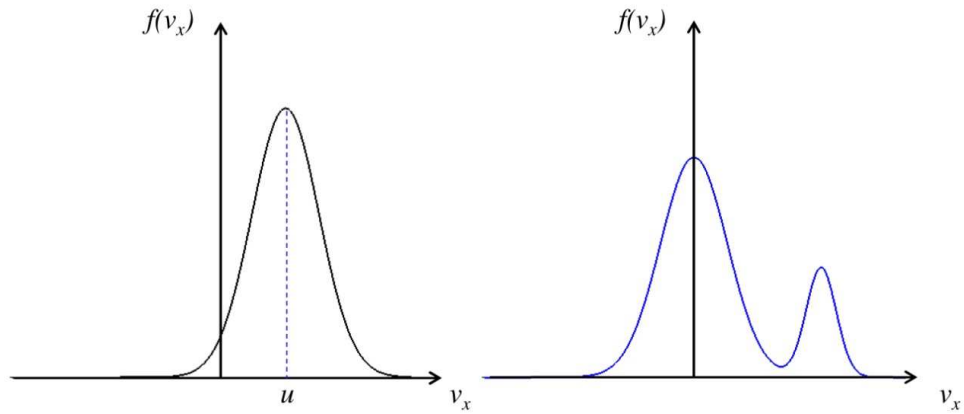


Figure 2. Deux fonctions de distribution qui donnent la même densité

Soit $J(E, \alpha, \mathbf{x})$ le flux mesuré à une énergie entre E et $E + dE$, dans un angle solide $d\Omega$ autour de la direction d'arrivée α et à la position de l'instrument \mathbf{x} . On a donc $J(E, \alpha, \mathbf{x}) dE d\Omega = v dn$. $dn = f d^3\mathbf{v} = f v^2 dv d\Omega$ si on se place en coordonnées polaires.

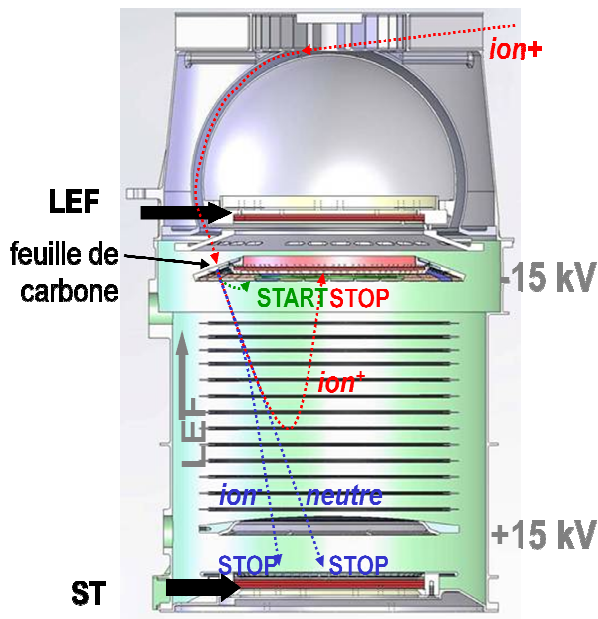


Figure 3. A gauche schéma de principe du spectromètre de masse ionique MSA qui va voler à bord de Bepi Colombo. La partie supérieure (hémisphérique) permet l'analyse en angle d'arrivée et en énergie. La partie inférieure est un analyseur à temps de vol qui permet de déterminer le rapport m/q de la particule et donc sa nature. A droite photo de l'instrument qui permet de voir la symétrie cylindrique et les fenêtres d'entrée des particules.

Comme $E = mv^2/2$, on a $dE = mv dv$. Finalement $J = \frac{v^2}{m} f$ et on a une relation très simple entre le flux mesuré et la fonction de distribution. Cette apparente simplicité cache certaines difficultés techniques. Pour obtenir une fonction de distribution il faut faire varier la position (c'est la position de l'instrument), l'énergie et l'angle d'arrivée. Pour faire varier l'énergie il suffit de faire varier la différence de potentiel entre les deux plaques hémisphériques qui constitue l'instrument (voir Figure 3, schéma de gauche). Pour faire varier l'angle d'arrivée, il faut autant de petites fenêtres que d'angles d'arrivée, ce qui limite nécessairement la résolution angulaire (Figure 3, photo de droite). On voit aussi que ces angles d'arrivée sont tous dans un plan, donc pour

accéder à toutes les directions possibles, il faut soit plusieurs instruments, soit mettre l'analyseur sur une plateforme qui tourne. Ce type d'instruments permet la mesure des fonctions de distribution des particules (électrons ou ions suivant le signe de la différence de potentiel) dans l'espace depuis la fin des années 1960.

c) Cas particulier de la distribution maxwellienne

Pour un milieu homogène et stationnaire, la fonction de distribution en vitesses la plus connue est la distribution maxwellienne ou distribution de Maxwell-Boltzmann (écrite ici pour un espace à 3 dimensions) :

$$f(\mathbf{v}) = \frac{n}{(2\pi)^{3/2} V_{th}^3} e^{-\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2}{2V_{th}^2}}$$

Sa réputation vient de ce qu'elle représente la fonction de distribution des vitesses dans un gaz parfait en équilibre thermodynamique. La statistique qui sous-tend cette fonction de distribution est le modèle « boules de billard » où les atomes du gaz sont en interaction uniquement lors des chocs, lesquels dominent la physique du système. Dans un plasma, on a vu au chapitre 1 que les collisions ne dominent pas toujours la physique et que si elles sont présentes, ce sont des interactions électrostatiques, donc à longue portée. La fonction de distribution n'est donc pas forcément maxwellienne. En pratique on peut résumer les cas de figures rencontrés de la manière suivante : dans un plasma froid (où des neutres sont présents) ou collisionnel, la fonction de distribution est maxwellienne ; dans un plasma non-collisionnel, elle peut avoir des formes très différentes. L'exemple le plus simple de fonction de distribution non-maxwellienne est ce qu'on appelle la bi-maxwellienne. Dans un plasma rendu très anisotrope par un fort champ magnétique, il n'est pas rare d'observer une distribution à deux températures, une dans la direction parallèle au champ et l'autre dans la direction perpendiculaire au champ :

$$f(v) = \frac{n}{(2\pi)^{3/2} V_{th//} V_{th\perp}^2} e^{-\frac{(v_{//}-u_{//})^2}{2V_{th//}^2}} e^{-\frac{|\mathbf{v}_{\perp}-\mathbf{u}_{\perp}|^2}{2V_{th\perp}^2}}$$

Un autre exemple théorique de fonction non-maxwellienne est donné sur la Figure 2 à droite. On peut l'interpréter comme une population maxwellienne à laquelle s'ajoute un faisceau de particules de vitesse positive. La Figure 4 montre une fonction de distribution mesurée expérimentalement, clairement non maxwellienne.

2. EQUATIONS CINÉTIQUES

Les équations cinétiques sont les équations d'évolution de la fonction de distribution. Elles sont à la fonction de distribution, ce que le principe fondamental de la dynamique est à une particule individuelle. Elles sont d'ailleurs déduites de ce principe fondamental. Elles ont la forme générale suivante :

$$\partial_t(f) + \mathbf{v} \cdot \nabla_x(f) + \langle \mathbf{a} \rangle \cdot \nabla_v(f) = \partial_t(f)_c$$

Le **premier membre** fait intervenir le gradient standard (dans l'espace des positions) et le gradient dans l'espace des vitesses : $\nabla_v(f) = \frac{\partial f}{\partial v_x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial v_y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial v_z} \mathbf{e}_z$. Il fait aussi intervenir le principe fondamental de la dynamique moyenné, c'est-à-dire dans le cas où seuls interviennent les champs électromagnétiques : $\langle \mathbf{a} \rangle = q/m (\langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{v} \times \langle \mathbf{B} \rangle)$, c'est à dire les **champs moyens**. Le **second membre** tient compte du rôle des fluctuations réelles des champs et des positions des particules (voir la Figure 1), c'est à dire, en fait des **collisions**. Suivant les approximations faites pour décrire ce terme de collision, l'équation porte un nom propre différent : Boltzmann, Vlasov, Fokker-Planck, etc....

Equation de Boltzmann

C'est la plus ancienne des équations cinétiques (1877), par laquelle Boltzmann a apporté la première interprétation cinétique de l'hydrodynamique. Il fait deux hypothèses essentielles : (i) les interactions entre particules sont toutes binaires (pas de collisions à 3 corps) et élastiques et (ii) on est en présence de chaos moléculaire (il n'y a pas de corrélations entre les vitesses des deux particules qui entrent en collision). Le terme de collision est estimé par un modèle "boule de billard", c'est à dire un potentiel d'interaction nul au delà d'un certain rayon et un cœur dur en deçà. Sous ces hypothèses le terme de collision s'écrit de la manière suivante :

$$\partial_t(f)_c = \iint d^3\mathbf{v}_1 d^3\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| \sigma (f(\mathbf{v}_1')f(\mathbf{v}_2') - f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2))$$

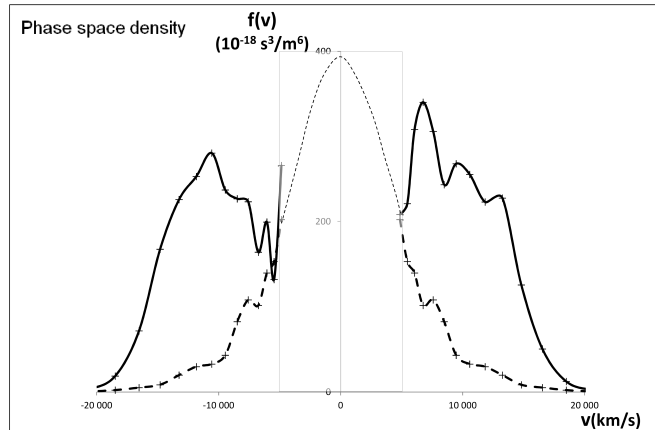


Figure 4. Fonction de distribution des électrons mesurée dans l'environnement de la Terre par l'instrument PEACE à bord de Cluster (mission ESA). La partie grisée au centre n'est pas accessible à la mesure. Le pointillé représente la fonction de distribution perpendiculaire, approximativement maxwellienne. Le trait plein la fonction de distribution parallèle au champ magnétique. On voit clairement deux faisceaux d'électrons de vitesses opposées, ce sont des particules accélérées qui oscillent entre deux points miroir du champ magnétique terrestre (avec l'aimable autorisation de D. Fontaine).

Les vitesses avant et après le choc sont représentées sur la Figure 5. Le fait que la collision soit élastique impose que la vitesse relative des particules entrant dans le petit volume de l'espace des phases et de celles sortant soit identique. La section efficace de collision σ est aussi supposée identique dans les deux cas. La fonction de distribution dépend aussi de \mathbf{x} et de t , mais ils n'ont pas été indiqués pour alléger l'écriture.

La question qu'on peut se poser légitimement est de savoir si la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann est solution de l'équation de Boltzmann. La réponse est oui si l'on suppose que le milieu est homogène, stationnaire et non soumis à des forces extérieures. Dans ce cas, tous les termes de gauche de l'équation sont nuls et le terme de collision doit donc être nul aussi. On obtient alors :

$$f(\mathbf{v}_1')f(\mathbf{v}_2') = f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2)$$

Si on prend le logarithme de cette expression, on constate que $\ln f$ doit être un invariant lors de la collision des deux particules, ce qui implique qu'il soit une combinaison des invariants déjà connus pour une collision élastique, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique. On aboutit donc bien à une forme maxwellienne pour $f(\mathbf{v})$. Mais ceci semble nous éloigner un peu des plasmas, puisqu'on a vu que cette interaction de type « boule de billard » n'est pas vraiment représentative des interactions à l'intérieur des plasmas, sauf dans le cas d'un plasma froid où les neutres jouent un rôle important. Néanmoins il est important de noter que la distribution de Maxwell-Boltzmann joue un rôle particulier puisque c'est la forme vers laquelle tend toute fonction de distribution, dans un milieu homogène et stationnaire, dès lors qu'il y a des collisions.

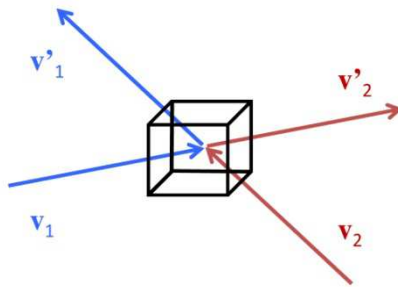


Figure 5. Vitesses des deux particules qui entrent en collision avant et après le choc élastique. Le petit cube représente le volume de l'espace des phases sur lequel est fait le bilan des entrées et sorties du terme de collision de Boltzmann.

b) Equation de Vlasov

L'équation cinétique la plus simple est l'équation de Vlasov.

$$\partial_t(f) + \mathbf{v} \cdot \nabla_x(f) + \langle \mathbf{a} \rangle \cdot \nabla_v(f) = 0$$

Elle consiste simplement à considérer que le second membre est nul, c'est à dire que le plasma est *sans collision*. Dans cette équation, $\langle \mathbf{a} \rangle$ représente l'accélération moyenne due aux champs "moyens" ou "collectifs", et le second membre est nul : les particules sont en moyenne trop loin les unes des autres pour que leurs interactions binaires jouent un rôle notable (c'est le cas de beaucoup de plasmas peu denses). On voit sur la forme de l'équation de Vlasov que n'importe quelle fonction de distribution f uniforme et stationnaire est solution avec un champ collectif nul (éventuellement instable mais solution tout de même). La forme maxwellienne ne joue donc aucun rôle particulier dans ce cas, même si elle est solution de l'équation.

c) Equation de Fokker-Planck

Elle prend en compte le fait que dans un plasma les collisions sont coulombiennes. Le libre-parcours moyen étant proportionnel à T^2 , est proportionnel à v^4 (voir chapitre 1) les particules de grande vitesse ont un libre-parcours moyen plus grand que celle de faible vitesse ; elles sont moins affectées par les collisions. Ce phénomène est illustré sur la Figure 6 (partie droite) : les trajectoires sont toujours « lisses » car il n'y a pas de réel choc, les trajectoires des particules de haute énergie sont quasiment rectilignes, alors que celles des particules d'énergie initiale plus faible sont un peu plus perturbées. Mais on en voit jamais sur les trajectoires les « à-coups » qu'on voit sur le champ électrique (au voisinage d'une particule). Ce n'est jamais ce champ localement très fort qui détermine la trajectoire d'une particule.

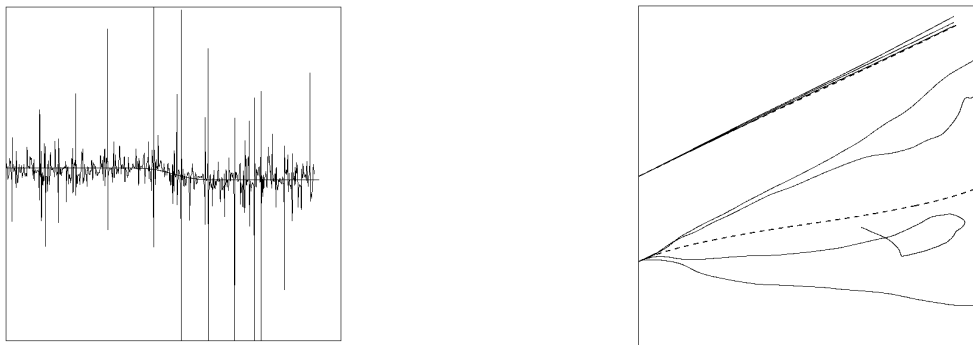


Figure 6. Champ électrique (à gauche) et trajectoires des particules (à droite), suivant que leur vitesse initiale est grande (en haut) ou petite (en bas). On voit des pics très forts de champ électrique qui correspondent au passage tout près d'une particule. Par contre on ne voit pas d'effet de ce champ sur la trajectoire qui reste toujours lisse. (Figure tirée de *Collisionless Plasmas in Astrophysics*, by Belmont, Grappin, Mottez, Pantellini and Pelletier, Ed Wiley, 2013)

Le terme de collision au second membre de l'équation cinétique est calculé en tenant compte des interactions coulombiennes binaires corrigées par des effets collectifs d'"écranage". Les intégrales de collision sont coupées) λ_D , considérant que la corrélation entre deux particules ne va pas au-delà.

CHAPITRE 4. MODELISATION FLUIDE DES PLASMAS ET LIMITE MHD

Pour résoudre un problème de physique des plasmas, l'utilisation d'une équation cinétique est souvent trop lourde, même numériquement, pour être envisagée. On tente alors de remplacer cette équation différentielle qui porte sur la fonction $f(\mathbf{v})$ et sa dérivée par rapport à \mathbf{v} , par un système d'équations algébriques qui ne portent que sur un petit nombre de quantités scalaires. Ces quantités seront les premiers moments de la fonction de distribution f , c'est à dire les quantités macroscopiques densité, vitesse, pression... ; on les qualifiera de grandeurs « fluides ». De même, on appellera « équations fluides » les équations qui relient ces grandeurs entre elles. Nous verrons qu'il est dans le cas général nécessaire d'introduire un système d'équations fluides pour chaque « population » du plasma ; sous certaines approximations, nous verrons que ce système « multi-fluide » peut être réduit à un système plus simple, « mono-fluide » : le système Magnétohydrodynamique (MHD).

1. DEFINITION DES GRANDEURS FLUIDES

a) Les moments de la fonction de distribution

Au cœur d'un plasma constitué généralement d'électrons et de plusieurs espèces d'ions, considérons une "population", c'est à dire, comme au chapitre 3, n'importe quel ensemble de particules identiques, ou au moins de même rapport q/m . Les différentes grandeurs fluides se définissent comme les moments de la fonction de distribution.

densité :

impulsion :

pression cinétique :

flux de chaleur :

$$n = \int f(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v}$$

$$n\mathbf{m}\mathbf{u} = \int m\mathbf{v}f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v}$$

$$\overline{\mathbf{p}} = \int m(\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{Q}}} = \int m(\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v}$$

...

Ces différents moments avaient déjà été présentés dans le chapitre d'introduction, mais seulement dans le cas mono-dimensionnel. Les notations tensorielles font référence à l'ordre du tenseur (deux barres pour un tenseur d'ordre 2, trois pour un tenseur d'ordre 3). Il y a un jeu de moments par population, donc au minimum deux, pour un plasma globalement neutre.

b) Définitions de la pression et équation d'état

Le tenseur de pression cinétique défini ci-dessus est ce que nous appellerons simplement « pression » dans la suite de ce cours, en omettant l'adjectif « cinétique ».

Remarquons d'abord qu'il s'agit du moment « centré » $\langle (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle$. La pression ne prend donc en compte que les différences de vitesse par rapport à la vitesse moyenne (fluide) ; elle mesure donc les fluctuations de vitesses dans un repère dans lequel le fluide est globalement au repos (c'est donc une grandeur indépendante de la vitesse du repère).

Lorsqu'on a l'occasion d'utiliser le moment non centré $\langle m\mathbf{v}\mathbf{v} \rangle$, il vient s'ajouter un terme qu'on appelle pression « dynamique » $\overline{\mathbf{p}}_d = n\mathbf{m}\mathbf{u}\mathbf{u}$:

$$nm \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle = nm \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle + n\mathbf{m}\mathbf{u}\mathbf{u} = \overline{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{p}}_d$$

Le tenseur $\overline{\mathbf{p}}$ est ce qu'on appelle aussi en d'autres contextes le « *tenseur des contraintes* ». Etant donnée une surface élémentaire $\delta\mathbf{S}$, le vecteur $\overline{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{S}$ représente, dans le repère où $\mathbf{u} = 0$, le *flux d'impulsion volumique* à travers $\delta\mathbf{S}$, chaque particule qui traverse la surface apportant avec elle son impulsion.

Considérons tout d'abord le cas d'une fonction de distribution isotrope (dans le référentiel dans lequel sa vitesse moyenne est nulle) : $f(\mathbf{w}) = f(w_x)f(w_y)f(w_z)$ avec $f(w_x) = f(w_y) = f(w_z)$. On a introduit pour simplifier la notation $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Les indices x, y, z font référence aux composantes de la vitesse dans un repère cartésien. D'après la définition du tenseur de pression :

$$p_{xy} = \int m w_x w_y f(w_x) f(w_y) f(w_z) dw_x dw_y dw_z = 0,$$

puisque la fonction $f(\mathbf{w})$ est par définition de moyenne nulle. Le même raisonnement s'applique aux autres termes non diagonaux du tenseur, nuls eux aussi. Le tenseur de pression est donc diagonal dans le cas isotrope. On peut calculer la valeur des termes diagonaux :

$$p_{xx} = \int m w_x^2 f(w_x) f(w_y) f(w_z) dw_x dw_y dw_z = nm \langle w_x^2 \rangle$$

ici encore, la distribution étant isotrope, on a $\langle w_x^2 \rangle = \langle w_y^2 \rangle = \langle w_z^2 \rangle$ et on voit que le tenseur de pression se réduit à un scalaire p que multiplie le tenseur identité. On définit usuellement la *température cinétique* T (on parlera après simplement de température) comme proportionnelle à la moyenne quadratique de la vitesse, $\langle w_x^2 \rangle = \langle w_y^2 \rangle = \langle w_z^2 \rangle = k_B T/m$. On voit donc que cette définition induit, dans le cas isotrope, l'équation d'état liant densité, température et pression scalaire

$$p = nk_B T$$

Dans le cas d'une *fonction de distribution totalement isotrope*, le flux d'impulsion résultant est donc toujours *colinéaire* au vecteur normal $\delta\mathbf{S}$: $\overline{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{S} = p \delta\mathbf{S}$ (comme on en a l'habitude en thermodynamique), puisque le tenseur de pression est réduit à une pression scalaire $\overline{\mathbf{p}} = p \overline{\mathbf{I}}$. Au contraire, chaque fois que l'impulsion résultante peut posséder une composante orthogonale à $\delta\mathbf{S}$ (*i.e.* parallèle à la surface), la pression est un tenseur complet comme en présence des forces de cisaillement ou comme dans l'exemple de la figure 1. Dans un plasma collisionnel, dont l'état d'équilibre en milieu homogène est une fonction de distribution *isotrope* et maxwellienne, ce sont les inhomogénéités du milieu qui peuvent créer une anisotropie de la fonction de distribution ; celle-ci est alors très petite mais, peut jouer un rôle important, puisqu'elle est responsable des effets de viscosité (elle se manifeste par l'apparition de termes non-diagonaux, dits « *de viscosité* » dans tenseur des contraintes $\overline{\mathbf{p}}$). Dans un plasma sans collision au contraire, les écarts à l'isotropie peuvent être importants et exister même en milieu homogène.

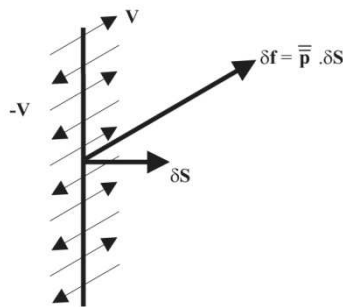


Figure 1. Exemple simple d'une pression non scalaire. Si les particules ont toutes l'une des deux vitesses $\pm v$ (en nombre égal dans chaque sens), la fonction de distribution est dite « *bi-faisceaux* ». Le flux net d'impulsion $\delta\mathbf{f}$ est alors nécessairement porté par la direction commune à toutes les impulsions individuelles et il n'est donc pas colinéaire à $\delta\mathbf{S}$.

Dans la suite de ce cours, nous considérerons essentiellement le cas de milieux isotropes, et donc de pressions scalaires, ceci dans le but d'alléger les notations et d'éviter les calculs tensoriels, qui peuvent s'avérer lourds, sans être essentiels à la physique que nous voulons décrire.

c) *Energie cinétique*

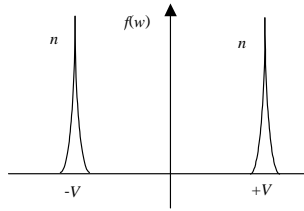
L'énergie cinétique de chaque particule étant $1/2 mv^2$, elle apparaît comme la demi-trace du tenseur $m\mathbf{v}\mathbf{v}$. L'énergie cinétique par unité de volume est donc la somme de deux termes, correspondant aux pressions cinétique et dynamique définies au paragraphe précédent, dont les expressions se retrouvent simplement dans le cas isotrope :

$$\begin{aligned} \text{Energie thermique :} & \quad E_{th} = \frac{3}{2}nk_B T \\ \text{Energie dirigée :} & \quad E_d = \frac{1}{2}nm\mu^2 \end{aligned}$$

Il est à noter que les notions d'énergie dirigée ou thermique n'ont pas une nature « absolue », mais dépendent de la manière dont on choisit de séparer l'ensemble de particules en « populations », chacune décrite par ses propres grandeurs fluides. L'exemple de fonction de distribution présenté sur la figure 2, illustre ce fait : On peut choisir de décrire ce système soit comme deux faisceaux monocinétiques (i.e. de température nulle), soit comme une population globale qui superpose les deux. Ce qui était pression dynamique (et énergie dirigée) dans les populations séparées devient pression cinétique (et énergie thermique) dans la superposition.

Pour chaque faisceau :

$$\begin{aligned} n\mu^2 &= nmV^2 \\ p &= 0 \end{aligned}$$



Pour l'ensemble des deux faisceaux :

$$\begin{aligned} n\mu_g^2 &= 0 \\ p_g &= 2nmV^2 \end{aligned}$$

Figure 2. Dans un plasma sans collision, les pressions dynamique et cinétique de deux populations ne s'additionnent pas séparément, mais la pression totale est bien additive.

En général, ni la pression cinétique p ni la pression dynamique ρu^2 ne sont donc des grandeurs additives séparément : seule leur somme est conservée dans la superposition. L'additivité est malgré tout respectée dans un cas particulier : c'est celui où toutes les populations regroupées ont la même vitesse fluide (on y reviendra plus loin dans ce cours) ; c'est en particulier le cas dans un milieu collisionnel et ceci justifie alors l'emploi de la notion de « *pression partielle* ».

2. EQUATIONS D'EVOLUTION DES GRANDEURS FLUIDES

Les équations cinétiques régissant l'évolution de la fonction de distribution d'une population donnée (une ou plusieurs populations d'électrons, différentes espèces ioniques) s'écrivent, comme on l'a vu au chapitre 3 :

$$\partial_t(f) + \mathbf{v} \cdot \nabla_x(f) + \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v(f) = -\partial_t(f)_c$$

et diffèrent par l'expression du terme de collision. Celui-ci est nul dans les plasmas sans collision (équation de Vlasov), mais il est plus généralement une fonction de la fonction de distribution $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. On appelle "équations fluides" les équations de transport (cf. Appendice A) qui relient entre eux les différents **moments** de la fonction de distribution par rapport à la vitesse \mathbf{v} . Nous allons montrer qu'on tire facilement une **suite infinie d'équations fluides** à partir de l'équation cinétique écrite ci-dessus.

a) *Equation de transport de la densité (conservation du nombre de particules)*

Pour obtenir l'équation de conservation du nombre des particules, ou transport de la densité, il suffit d'intégrer l'équation cinétique par rapport à \mathbf{v} . L'intégrale des deux premiers termes fournit immédiatement $\partial_t(n) + \nabla \cdot (n\mathbf{u})$: il suffit pour cela d'utiliser directement les intégrales du paragraphe 1.a définissant n et $n\mathbf{u}$, en n'oubliant pas que les variables t , \mathbf{x} et \mathbf{v} sont indépendantes et que les dérivées temporelles et spatiales peuvent donc être sorties des intégrales. L'intégrale du troisième terme donne identiquement zéro (les champs électrique

et magnétique ne changent pas le nombre de particules) : pour le terme en \mathbf{E} , cela vient, après intégration, de la nullité de f pour les valeurs infinies de la vitesse ; pour le terme en \mathbf{B} , cela vient de la périodicité 2π de la fonction de distribution par rapport à la gyrophase⁷.

A priori, on ne sait pas calculer l'intégrale du terme de collision tant que l'on n'a pas effectivement exprimé ce terme. Néanmoins, on sait d'avance que cette intégrale sera identiquement nulle pour tous les types de collisions qui conservent le nombre de particules, ce qui est le cas tant qu'il n'y a pas de réactions chimiques (cas qui ne sera pas traité dans ce cours).

L'équation de transport de la densité, encore appelée « équation de continuité » s'écrit donc, comme on le sait en hydrodynamique :

$$\partial_t(n) + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0$$

b) Equation de transport de l'impulsion

Pour obtenir l'équation de transport de l'impulsion, il faut multiplier l'équation cinétique de départ par $m\mathbf{v}$ avant de l'intégrer (pour obtenir celle de la pression, il faut multiplier l'équation cinétique par $m(\mathbf{v}-\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ avant de l'intégrer, etc. Nous ne détaillerons pas ici tous ces calculs). L'équation de transport de l'impulsion, dans le cas d'une pression scalaire, s'écrit :

$$\partial_t(nm\mathbf{u}) + \nabla \cdot (nm\mathbf{u}\mathbf{u} + p) - nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F}_c - \nabla p_c$$

qu'on peut réécrire, en utilisant l'identité $\nabla \cdot (nm\mathbf{u}\mathbf{u}) = nm(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + m\mathbf{u}\nabla \cdot (n\mathbf{u})$ et l'équation de continuité, sous la forme plus usuellement rencontrée en hydrodynamique :

$$nm\partial_t\mathbf{u} + nm(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p - nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F}_c - \nabla p_c$$

Le second membre de cette équation de transport est une intégrale, pour la population considérée, du terme de collision de l'équation cinétique. Il est le plus souvent nul ou négligeable. Arrêtons-nous tout de même un instant sur sa signification, car il constitue l'une des voies par lesquelles les collisions influent sur le comportement du plasma. Nous avons séparé le second membre en deux parties : le premier terme \mathbf{F}_c représente les forces de friction de la population considérée avec les autres populations et il peut effectivement ne pas être négligeable : c'est par exemple le cas de la force de friction avec les ions quand on considère le mouvement de la seule population électronique, et dans ce cas, c'est ce qui introduit la notion importante de *résistivité*. Le second terme $-\nabla p_c$ représente les forces de « *pression interparticulaire* », exercées par les différentes populations de particules sur la population considérée.

c) Transport de l'énergie

Comme nous l'avons vu, l'énergie cinétique portée par les particules est la somme de deux termes, l'énergie thermique et l'énergie dirigée.

- énergie thermique

On obtient l'équation de transport de l'énergie thermique en multipliant l'équation cinétique par $m(\mathbf{v}-\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ et en intégrant sur \mathbf{v} . Pour une pression p scalaire (plasma isotrope), on obtient :

$$\partial_t\left(\frac{3}{2}p\right) + \nabla \cdot \left(\frac{5}{2}p\mathbf{u} + \mathbf{q}\right) = \mathbf{u} \cdot \nabla(p)$$

où \mathbf{q} est le vecteur flux de chaleur⁸. On a négligé ici les termes provenant des collisions. On remarquera qu'aucun terme provenant de la force de Laplace n'apparaît : Ceci vient du fait que la force de Laplace ne

⁷ Pour le voir, il faut écrire le terme $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v(f)$ en coordonnées cylindriques dans l'espace des vitesses $(v_{||}, v_{\perp}, \varphi)$ et constater qu'il est simplement proportionnel à $\partial f / \partial \varphi$. Ce terme est donc identiquement nul dans le cas d'une fonction de distribution gyrotrope, ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ et $\nabla_v(f)$ sont orthogonaux). Plus généralement, il donne toujours zéro par intégration sur φ .

⁸ Par sa définition, on voit que \mathbf{q} est défini à partir de $\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}$ par une sommation sur les deux derniers indices : $q_i = \sum_j \overline{Q_{ij}}$

travaille pas ; elle opère des échanges entre les impulsions dans différentes directions, mais à énergie constante.

Si, de plus, on peut admettre que les variations considérées sont adiabatiques (divergence nulle du flux de chaleur : $\nabla(\mathbf{q})=0$), cette équation de transport de l'énergie thermique peut s'écrire sous la forme encore plus simple (et bien connue) d'une relation entre pression et densité :

$$d_t(p/n^{5/3})=0$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier ce résultat, à titre d'exercice. On reconnaît, sous cette forme, "l'équation d'état" des transformations adiabatiques en thermodynamique (pour des particules sans degré de liberté interne). On comprend au passage pourquoi le facteur 3 qui apparaît dans la puissance 5/3 ne découle que de l'hypothèse de pression scalaire dans un espace à trois dimensions, c'est à dire de l'hypothèse d'isotropie du milieu. On notera aussi que cette loi n'est certainement pas valable en général dans un plasma magnétisé non collisionnel où \mathbf{B} introduit naturellement une direction d'anisotropie (et où la pression n'est donc pas scalaire).

- énergie dirigée

Il suffit, pour trouver l'équation de transport de l'énergie dirigée, de multiplier scalairement par \mathbf{v} l'équation d'impulsion. On obtient, pour une pression scalaire et en négligeant les termes collisionnels :

$$\partial_t \left(nm \frac{u^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(nm \frac{u^2}{2} \mathbf{u} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla(p) + n\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}$$

- énergie cinétique totale

La somme des deux équations précédentes (énergie thermique + énergie dirigée) décrit le transport de l'énergie cinétique totale qui s'écrit, dans le cas le plus simple (collisions négligeables, pression scalaire) :

$$\partial_t \left(nm \frac{u^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{v} \left(nm \frac{u^2}{2} + \frac{5}{2} p \right) + \mathbf{q} \right) = n\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}$$

Le terme $n\mathbf{q} \cdot \mathbf{E}$, c'est à dire le travail des forces de Lorentz, décrit le transfert d'énergie du champ vers les particules. On peut l'écrire $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ (cf par exemple l'effet Joule) en appelant \mathbf{j} le courant (partiel) dû à la population considérée.

3. EQUATIONS DE FERMETURE

a) Domaine de validité des équations fluides

Le système infini des équations fluides se déduit rigoureusement de l'équation cinétique et ne suppose aucune approximation supplémentaire : chaque équation de transport est aussi exacte que l'équation cinétique d'où on l'a tirée. Mais l'équation de transport du moment d'ordre 0 (densité) fait intervenir le moment d'ordre 1 (vitesse), l'équation du moment d'ordre 1 fait intervenir le moment d'ordre 2 (pression), l'équation du moment d'ordre 2 fait intervenir le moment d'ordre 3 (flux de chaleur) etc... Pour disposer d'un système contenant un nombre fini d'équations, il faut tronquer cette hiérarchie d'équations. Cette troncature implique une hypothèse sur le comportement du dernier moment introduit dans le système fini d'équations fluides. Cette hypothèse est nommée équation de fermeture, et contient les approximations physiques.

Le problème fondamental des modélisations fluides est donc celui de l'équation de fermeture. Comment tronquer raisonnablement le système infini des équations fluides ? Puisque la méthode consiste à ne garder que les n premières équations fluides exactes (avec n assez petit), comment choisir la $(n+1)^{\text{ème}}$ équation, approximative, qui est supposée remplacer à elle seule l'infinité des équations fluides suivantes ? Le problème se pose en des termes très différents selon que le milieu est collisionnel ou non. Dans le plasma qui est souvent un milieu non-collisionnel, il s'agit de faire des approximations au coup par coup, et de les justifier. Lorsqu'aucune approximation n'est valable, il faut se résigner à raisonner sur l'équation cinétique complète elle-même et non pas sur un système fluide plus simple.

Il faut donc se souvenir qu'on ne peut utiliser les équations fluides que dans les cas où des *équations de fermeture* du système sont justifiées. Le principal contexte dans lequel de telles conditions sont justifiées est

celui des « *variations lentes* » dans les *plasmas magnétisés* (temps caractéristiques beaucoup plus longs que les gyropériodes, échelles spatiales beaucoup plus grandes que les rayons de Larmor, *comme nous le verrons dans les parties 4 et 5 de ce chapitre*). La figure 3 donne une illustration de l'information contenue dans une description fluide comparée à celle qui est contenue dans une description cinétique pour le même problème physique (en l'occurrence un choc créé par laser, pour plus d'information sur les chocs voir le chapitre 7). De façon analogue dans le plasma non magnétisé on pourra utiliser une fermeture dans certain cas où les échelles spatiales sont grandes devant la longueur de Debye.

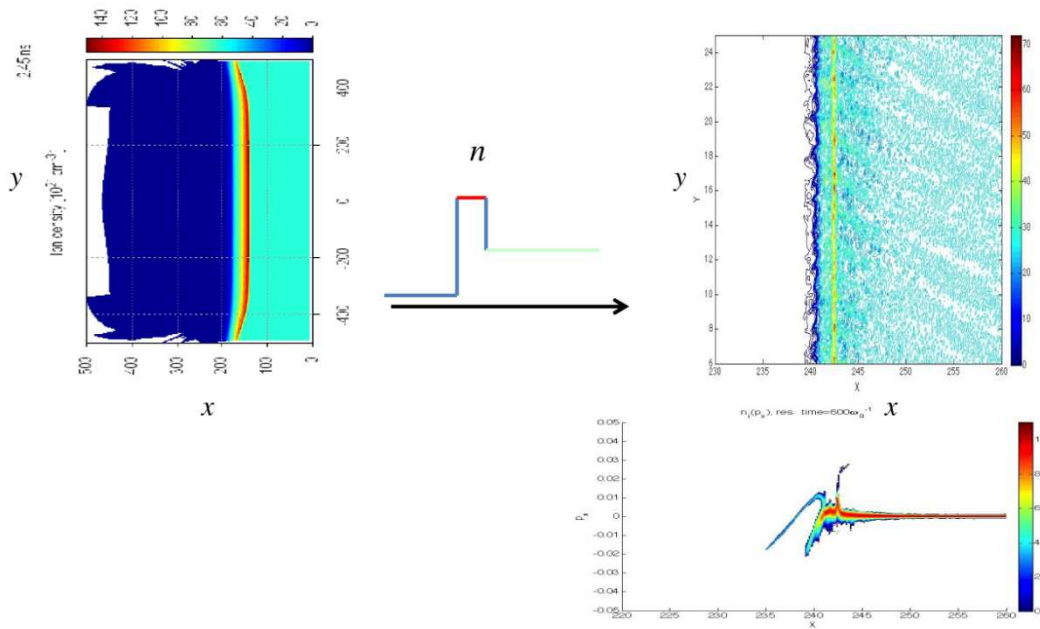


Figure 3. Calcul d'un choc avec deux simulations numériques différentes : à gauche un modèle fluide et à droite un modèle cinétique. On retrouve bien le choc sur les tracés de la densité ionique dans le plan (x, y) (figures du haut). La simulation cinétique permet de mettre en évidence des ions qui sont réfléchis par le choc (figure du bas), ce qui est impossible à décrire avec une simulation fluide.

Nous donnons ci-après des exemples d'équations de fermeture dans des cas simples et fréquemment rencontrés. Nous nous limitons au cas, là encore le plus usuel, où on ne conserve que les trois premières équations fluides. Trouver l'équation de fermeture consiste donc en trouver une forme approximative l'équation de transport de l'énergie, en faisant une hypothèse sur la forme du flux de chaleur.

b) Pression isotrope

Dans le cas le plus simple d'un plasma isotrope, nous avons vu que le tenseur de pression est scalaire :

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Une seule relation de fermeture est alors nécessaire. Une équation d'énergie complète, avec une forme approximative du flux de chaleur (type loi de Fourier) peut fournir cette équation de fermeture. Dans ce cas le flux de chaleur est un vecteur qui dépend du gradient de température et vaut :

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla(T) \text{ (loi de Fourier : } \kappa = \text{conductivité thermique)}$$

Cette équation constitue une *équation de fermeture* naturelle, puisque le troisième moment (le flux de chaleur) est ainsi exprimé en fonction de la température, c'est à dire des premier et deuxième moments (puisque $p = nk_b T$). Le système infini des équations fluides est donc ainsi limité aux seules trois premières, faisant apparaître densité, vitesse et pression.

On peut aussi souvent se contenter d'une relation de fermeture de forme polytrophe : $p/n^\gamma = \text{constante}$ ($\gamma=1$: isotherme, $\gamma=5/3$: adiabatique, $\gamma=3$: adiabatique à une dimension, $\gamma=\infty$: incompressible, ...) ⁹. Le choix des indices γ est généralement empirique.

Dans un plasma non-collisionnel, l'approximation d'isotropie est généralement difficile à justifier rigoureusement sur le plan théorique. Mais l'expérience montre que les fonctions de distributions trop anisotropes sont souvent instables et que, même en l'absence de collisions, un plasma ne s'éloigne souvent pas trop de l'isotropie.

c) Pression anisotrope en présence de champ magnétique

Dans un plasma magnétisé, on considère souvent un tenseur de pression **diagonal** dans un repère lié au champ magnétique. Ceci repose sur une hypothèse de symétrie de la fonction de distribution autour de **B** ("gyrotropie"). Pour la même raison, les deux termes diagonaux correspondant aux directions perpendiculaires à **B** sont supposés égaux, mais ils peuvent être différents du terme de pression parallèle.

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Deux équations de fermeture sont nécessaires dans ce cas. On les prend souvent de la forme :

$$d_t \left(\frac{p_{\perp}}{nB} \right) = 0, \quad \text{et} \quad d_t \left(\frac{p_{\perp}^2 p_{\parallel}}{n^5} \right) = 0$$

qui annulent la divergence du flux de chaleur. Ces lois sont parfois appelées « double-adiabatiques », ou encore « CGL », ayant été introduites par Chew, Goldberg & Low (article de 1956).

On peut aussi, à l'image du cas isotrope, utiliser des lois polytropes empiriques pour les composantes de la pression parallèle et perpendiculaire au champ magnétique :

$$d_t (p_{\perp} / n^{\gamma_{\perp}}) = 0, \quad d_t (p_{\parallel} / n^{\gamma_{\parallel}}) = 0$$

L'hypothèse **adiabatique** est en particulier vérifiée chaque fois qu'on a affaire à des perturbations qui se propagent parallèlement au champ magnétique à des vitesses grandes par rapport aux vitesses de toutes les particules (pas de particules "résonnantes" \Rightarrow pas d'échange d'énergie entre ondes et particules, on en reparlera à propos du traitement cinétique des ondes). Dans l'hypothèse inverse (propagation lente), ce sont plutôt des lois **isothermes** (lois polytropes avec $\gamma=1$) qui conviennent.

d) Cas général

Dans un milieu collisionnel, les interactions binaires entraînent *toujours* un comportement fluide, et donc l'existence d'une équation de fermeture. Dans un plasma sans collision, seuls les champs collectifs peuvent éventuellement assurer un tel comportement. Il semble que ces champs jouent effectivement ce rôle dans certaines conditions (lorsque l'effet des particules résonnantes est négligeable).

Quand aucune loi de fermeture n'est satisfaisante, il faut travailler directement sur la fonction de distribution et donc avec l'équation de Vlasov (traitement cinétique, cf chapitre 6). Cela signifie que le système d'équations portant sur les trois premiers moments n'est pas un système fermé et qu'on ne peut pas déterminer

⁹ L'hypothèse d'une équation de fermeture polytrophe $d_t (p/n^\gamma) = 0$ ne correspond pas, pour $\gamma \neq 5/3$, à une équation adiabatique, mais à une équation d'énergie thermique de la forme :

$$\partial_t \left(\frac{1}{\gamma-1} p \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p \mathbf{u} \right) = \mathbf{u} \cdot \nabla (p)$$

qui ne découle pas naturellement, en général, du système fluide initial.

l'évolution de ces trois variables sans connaître davantage d'informations. Dans ce cas, deux populations qui ont initialement les mêmes trois premiers moments peuvent avoir ensuite des évolutions différentes et des moments qui deviennent différents. Ceci est illustré sur la figure 4 : deux populations sont représentées, dont les fonctions de distribution ont sensiblement même densité, même vitesse moyenne, et mêmes vitesses thermiques perpendiculaire et parallèle. On imagine assez facilement que l'évolution de ces fonctions de distribution puisse être différente et que leurs moments, un instant plus tard puissent prendre des valeurs différentes.

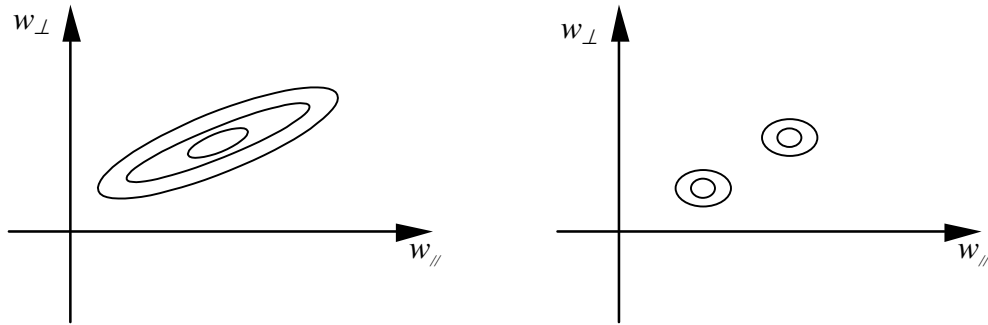


Figure 4. Isocontours de fonctions de distribution qui ont initialement leurs trois premiers moments identiques et qui n'auront pas forcément la même évolution ultérieure, leurs moments pouvant prendre ensuite des valeurs différentes.

4. DESCRIPTION MULTI-FLUIDES DU PLASMA

a) Notion de « population » et système multi-fluide

Dans le but de réaliser une description « fluide » d'un plasma, et donc remplacer la fonction de distribution de toutes les particules par la donnée de quelques paramètres macroscopiques (densités, vitesses, pressions), il faut commencer par regrouper les particules en un nombre aussi petit que possible de « populations ». Parmi les particules du plasma, il est nécessaire de distinguer au minimum les différentes « espèces » présentes, ions ou électrons, caractérisées par leur charge et leur masse, ou plus précisément par leur rapport q/m . Mais à l'intérieur même de chaque espèce, on peut éventuellement être amené à distinguer plusieurs sous-ensembles de particules, par exemple en fonction de leur origine¹⁰, le critère principal étant toujours que chacune des « populations » ainsi identifiées respecte effectivement un système d'équations fluides, avec une équation de fermeture justifiée.

Chaque population est caractérisée par ses premiers moments n_j, \mathbf{u}_j, p_j . Pour la simplicité de l'exposé, on se placera dans un cas fluide dit « idéal », c'est à dire qu'on supposera que les seconds membres dus aux collisions sont nuls (ce ne serait pas le cas, par exemple, si des collisions électrons-ions causaient une résistivité). On admettra aussi que les pressions sont scalaires ; une théorie fluide anisotrope se construirait de façon tout à fait similaire, mais beaucoup de résultats ne dépendent pas de façon critique de cette hypothèse simplificatrice.

Supposons un système à N populations. Pour chaque population, si on omet le flux de chaleur (cf paragraphe suivant), on dispose de 5 équations (deux équations scalaires et une vectorielle) portant sur 5 variables fluides $[n_j, \mathbf{u}_j, p_j]$ (deux variables scalaires et une vectorielle) et 6 variables de champ, \mathbf{E} et \mathbf{B} . Les équations de Maxwell fournissent 6 équations indépendantes supplémentaires. On a donc au total un système de $5N + 6$ équations à $5N + 6$ inconnues :

¹⁰ En physique magnétosphérique par exemple, on peut imaginer qu'un détecteur embarqué sur un satellite mesure une fonction de distribution électronique incluant deux pics, l'un constitué de particules de basse énergie (électrons "froids"), provenant d'une source ionosphérique située sur la même ligne de force, et l'autre de plus haute énergie (électrons "chauds"), convectés perpendiculairement à \mathbf{B} depuis la queue magnétosphérique. Il est vraisemblable que ces deux populations d'électrons aient un comportement différent vis à vis des variations de champs.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(n_j) + \nabla \cdot (n_j \mathbf{u}_j) = 0 \quad (N) \\ \partial_t(n_j m_j \mathbf{u}_j) + \nabla \cdot (n_j m_j \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j + p_j) = n_j q_j (\mathbf{E} + \mathbf{u}_j \times \mathbf{B}) \quad (3N) \\ \partial_t \left(n_j m_j \frac{\mathbf{u}_j^2}{2} + \frac{3}{2} p_j \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{u}_j \left(n_j m_j \frac{u_j^2}{2} + \frac{5}{2} p_j \right) + \mathbf{q}_j \right] = n_j q_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{E} \quad (N) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times (\mathbf{E}) = -\partial_t (\mathbf{B}) \quad (2) \\ \nabla \times (\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t (\mathbf{E}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{j} = \sum_j n_j q_j \mathbf{u}_j \quad (2) \\ \nabla \cdot (\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad \rho = \sum_j n_j q_j \quad (1) \\ \nabla \cdot (\mathbf{B}) = 0 \quad (1) \end{array} \right.$$

Tel qu'il est écrit ci-dessus, le système n'est pas fermé. Pour chaque population, la dernière équation de la partie fluide de ce système est l'équation d'énergie complète, dans laquelle la variable « flux de chaleur » \mathbf{q}_j n'a pas été exprimée. C'est le choix de l'équation de fermeture qui fixera la forme effective de cette dernière équation. Selon les cas, on pourra pour cela utiliser l'une quelconque des équations de fermeture présentées dans la partie précédente ; pratiquement, une équation très simple du genre $p_j/n_j \mathcal{M} = \text{cst}$ est souvent retenue. Dans ce chapitre, nous choisirons une hypothèse adiabatique, c'est à dire que nous garderons donc l'équation d'énergie ci-dessus, avec

$$\nabla \cdot (\mathbf{q}_j) = 0$$

Il est important de noter que chaque population peut avoir une équation de fermeture différente¹¹.

b) Hypothèse des variations lentes

Lors de l'étude des trajectoires individuelles, une première hypothèse de « variations lentes » a déjà été évoquée : c'est en considérant des perturbations lentes par rapport à la période du mouvement cyclotron que le premier invariant adiabatique a pu être introduit, ainsi que la notion de vitesse de dérive. Ce que nous appellerons désormais « hypothèses de variations lentes » inclut cette même condition sur le mouvement perpendiculaire, mais également une seconde condition sur le mouvement parallèle des électrons qui apporte une simplification supplémentaire du système (quasi-neutralité).

Nous allons voir que cette hypothèse, qui est justifiée dès lors qu'on étudie un système sur des « grandes » échelles spatio-temporelles (cf. paragraphe suivant), permet de simplifier considérablement le système d'équations fluides à résoudre. En effet sans les approximations de « variations lentes », le système ci-dessus est en général assez lourd : il s'agit d'un système 16×16 (16 équations et 16 inconnues) dans le cas minimal où il n'existe que des électrons et une seule espèce d'ions ; 21×21 dès qu'il existe 2 espèces d'ions à distinguer, etc...

- Enoncé des hypothèses de variations lentes :

Nous nous plaçons dans la limite basse fréquence et grande échelle, c'est à dire $\partial_t \approx 1/\tau \ll \{\omega_{cj}, \omega_{pe}\}$ et $\partial_x \approx 1/L \ll \{1/\rho_{Lj}, 1/\lambda_{De}\}$. Cela signifie que le temps caractéristique τ des phénomènes étudiés est long, d'une part par rapport au temps de giration de toutes les particules autour du champ magnétique ($1/\omega_{cj}$) et d'autre part par rapport au temps de retour vers la quasi-neutralité ($1/\omega_{pe}$) lié au mouvement parallèle des électrons. De la même façon, l'échelle spatiale des phénomènes doit être grande par rapport au rayon de Larmor de toutes les particules perpendiculairement au champ magnétique et grande par rapport à la longueur de Debye électronique le long de \mathbf{B} .

¹¹ On peut par exemple avoir des ions adiabatiques et des électrons isothermes.

- Conséquences

Pour étudier les conséquences des hypothèses de variations lentes qui viennent d'être définies, il suffit de reprendre le système d'équations du paragraphe 4.a, de faire tendre vers l'infini les échelles caractéristiques τ et L des phénomènes étudiés, c'est à dire les dérivées ∂_t et ∂_x vers zéro. On voit alors immédiatement que :

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{0}$$

$$\rho \rightarrow 0$$

$$\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{0}$$

Conséquence 1 : Champ gelé. La première relation est extrêmement importante ; elle signifie que les différentes populations ont toutes sensiblement la même vitesse fluide perpendiculaire :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u}_j \times \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{u}_{j\perp} = \frac{\mathbf{E}}{B} \times \mathbf{b}$$

Cette vitesse est bien entendu la vitesse moyenne (vitesse de dérive) de chacune des particules individuelles dans le cas de variations lentes (vis à vis de $1/\omega_{cj}$ et ρ_{Lj}). Cette vitesse commune est la première cause du comportement collectif ("fluide") des particules en ce qui concerne les mouvements *perpendiculaires*. Ce mouvement commun de toutes les populations à la "vitesse du champ magnétique" se retrouve dans toutes les théories de variations lentes, en particulier la MHD que nous étudierons un peu plus loin. On parle du "**champ gelé**" dans le plasma (ou du plasma gelé dans le champ). L'**appendice B**, à la fin de ce chapitre, développe une conséquence importante de cette loi, celle de l'identité des lignes de champ au cours du mouvement (conservation des « connexions ») et du problème de la « reconnexion » magnétique. Deux conséquences plus immédiates peuvent déjà être retenues :

- A l'ordre zéro, $E_{\parallel} \approx 0$ (i.e. $E_{\parallel} \ll E_{\perp}$). Si le champ est de nature électrostatique, ceci entraîne que les lignes de champ magnétique sont quasi-équipotentielles.

- Pour les plasmas non relativistes, on a $u_{\perp} = E_{\perp}/B \ll c$. Cela implique que l'énergie électrique est toujours négligeable devant l'énergie magnétique : $\epsilon_0 E^2 \ll B^2/\mu_0$, mais aussi que le courant de déplacement $\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ est négligeable devant le courant de conduction \mathbf{j} porté par les particules.

Conséquence 2 : Quasi-neutralité. La seconde relation constitue ce qu'on appelle l'approximation de « quasi-neutralité » associée aux variations lentes (vis à vis de $1/\omega_{pe}$ et λ_{De}). Elle ne signifie pas que la charge d'espace soit rigoureusement nulle, mais qu'elle est très inférieure aux densités de charge $n_j q_j$ dues à chaque population individuellement : elle est d'ordre 1 dans le développement en variations lentes, comme $\nabla \cdot (\mathbf{E})$, alors que les charges $n_j q_j$ sont d'ordre zéro.

Conséquence 3 : Courant quasi-nul. De la même façon, la troisième relation montre que le courant total est d'ordre 1 aussi, c'est à dire très inférieur aux courants $n_j q_j u_{j\perp}$ portés par chaque population (qui sont d'ordre zéro). Cela n'empêche pas les courants d'avoir un rôle important dans la dynamique du plasma.

Les deux relations ci-dessus (quasi-neutralité et courant quasi-nul) sont les causes du comportement collectif des différentes populations du plasma à basse fréquence pour les mouvements *parallèles* au champ magnétique.

A l'aide de toutes les approximations qui viennent d'être présentées, le système précédent devient plus léger. En s'en tenant à l'ordre le plus bas dans le développement en « variations lentes » (par rapport aux ∂_t et ∂_x), les relations $\mathbf{E}_{\perp} = -\mathbf{u}_j \times \mathbf{B}$ permettent d'éliminer $2N - 1$ équations fluides et $2N - 1$ variables. La raison pour laquelle on ne peut éliminer que $2N - 1$ équations et non pas $2N$ est que ces équations ne sont pas linéairement indépendantes à cet ordre : si on en fait la somme des termes $n_j q_j (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$, on obtient $\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ qui est un terme d'ordre 1 (et donc nul à l'ordre zéro). Il faut par conséquent garder dans le système cette équation d'ordre 1 qui est la somme sur les populations j de toutes les équations d'impulsion. On aura ainsi ramené la dimension $5N + 6$ à une dimension $3N + 7$. De plus, deux équations de Maxwell sont simplement remplacées par $\rho \approx 0$ et $\mathbf{j} \approx 0$, ce qui est sensiblement plus simple, et le courant de déplacement a disparu. Il ne reste plus, pour que ce système se rapproche du système classique de la mécanique des fluides, qu'à diminuer autant que possible la valeur de N .

5. DESCRIPTION MHD (MAGNETOHYDRODYNAMIQUE)

a) Réduction du nombre de populations

A l'intérieur d'une même espèce (même rapport q/m), on peut toujours tenter de regrouper plusieurs populations, car le regroupement de deux populations est une nouvelle population. Toutes les équations « exactes » du système fluide gardent alors la même forme que les équations des populations élémentaires, les moments de la population globale g étant simplement reliés à ceux des populations élémentaires par :

$$\begin{aligned} n_g &= \sum n_j, & n_g m_g \mathbf{u}_g &= \sum n_j m_j \mathbf{u}_j, & \bar{\mathbf{p}}_g + n_g m_g \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g &= \sum \bar{\mathbf{p}}_j + n_j m_j \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j \\ n_g m_g &= \sum n_j m_j, & \rho_g &= \sum n_j q_j, & \mathbf{j}_g &= \sum n_j q_j \mathbf{u}_j \end{aligned}$$

Il faut noter que les pressions cinétiques ne s'additionnent que dans les cas où les différentes populations sont décrites par un même champ de vitesse \mathbf{u} (c'est la condition sous laquelle on peut définir le concept de pression partielle, rencontré en thermodynamique).

Mais le système fluide n'est pas constitué uniquement d'équations exactes : *l'équation de fermeture* résulte d'une approximation et elle peut être différente d'une population à une autre. *C'est elle qui limite les possibilités de regroupement* :

- L'existence d'équations de fermeture élémentaires n'entraîne pas en général l'existence d'une équation de fermeture globale.

- Même si une équation de fermeture identique est valable pour toutes les populations, elle n'est pas valable automatiquement pour la population globale dès que cette équation est non linéaire. Si l'on considère par exemple des lois de fermeture polytropes, il n'est pas évident, en général, que $p_1/n_1^\gamma = k_1$ et $p_2/n_2^\gamma = k_2$ entraînent nécessairement $p_g/n_g^\gamma = k_g$.

b) Cas $N = 2$: système bi-fluide et MHD

Le système bi-fluide général. Le cas le plus simple qu'on peut avoir à résoudre est celui où il n'existe que deux espèces : les électrons et une seule espèce d'ions (positifs). S'il a été possible de regrouper tous les électrons en une seule population et de même pour les ions, on a alors affaire à un système « bi-fluide ». Cela peut se produire dans diverses conditions, nous supposons ici que les deux espèces de particules sont *adiabatiques*¹². Le système bi-fluide est en général un système de dimension $5N + 6 = 16$.

MHD. Dans le cas des variations lentes, la dimension du système bi-fluide est diminuée et, d'après la règle générale donnée plus haut, elle devrait devenir $3N + 7 = 13$. Nous allons montrer que le système se ramène en fait très facilement à une dimension 8 seulement.

- La relation de quasi-neutralité impose $n_+ q_+ + n_- q_- \approx 0$, soit :

$$n_+ \approx n_- \approx n$$

dans le cas où il n'existe pas d'ions multi-chargés¹³.

- De même, la relation sur le courant impose $n_+ q_+ \mathbf{u}_+ + n_- q_- \mathbf{u}_- \approx 0$, et donc, puisque $n_+ q_+ + n_- q_- \approx 0$:

$$\mathbf{u}_+ \approx \mathbf{u}_- \approx \mathbf{u}$$

On voit donc qu'un système bi-fluide, dans le cas des variations lentes, n'est en fait caractérisé que par **une seule vitesse** fluide et **une seule densité**, la vitesse et la densité des particules positives étant égales à l'ordre zéro à celles des charges négatives (ou proportionnelles dans le cas d'ions multi-chargés).

¹² Ceci est vérifié si les vitesses thermiques parallèles des deux espèces sont beaucoup plus petites que le rapport des échelles caractéristiques L_{\parallel}/τ des phénomènes étudiés.

¹³ Dans le cas contraire, on aurait $n_+/Z_+ \approx n_-/Z_- \approx n$ en posant $q_+ = Z_+ e$ et $q_- = -Z_- e$

Les équations des deux populations ne diffèrent plus alors que par les masses et les termes de pression. Nous pouvons donc obtenir un système d'équation très simplifié en prenant la somme des équations de conservations pour l'espèce ionique et l'espèce électronique. La somme des forces de Lorentz $\sum n_j q_j \mathbf{u}_j \times \mathbf{B}$ fournit la force de Laplace sur le plasma $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$; la somme des forces électriques $\sum n_j q_j \mathbf{E}$ est égale à la force de Coulomb globale $\rho_g \mathbf{E}$ s'exerçant sur le plasma, mais ce terme n'est généralement pas considéré ; il est en effet négligeable par rapport à la force de Laplace tant qu'on se place dans l'hypothèse non relativiste usuelle (énergie électrique \ll énergie magnétique, courant de déplacement \ll courant particulaire).

Le système bi-fluide, pour les variations lentes, qu'on appelle système magnéto-hydrodynamique, ou MHD, se ramène donc simplement à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(n) + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (1) \\ nm\partial_t \mathbf{u} + nm(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad \text{où } \mathbf{j} = \nabla \times (\mathbf{B}) / \mu_0 \quad (2) \\ \partial_t \left(nm \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{u} \left(nm \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{5}{2} p \right) \right] = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad \text{où } \mathbf{j} = \nabla \times (\mathbf{B}) / \mu_0 \text{ et } \mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (3) \\ \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times (\mathbf{E}) = -\partial_t (\mathbf{B}) \quad \text{où } \mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (4) \\ \nabla \cdot (\mathbf{B}) = 0 \quad (5) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On se rappellera que, dans ce système :

- On a noté $p = p_+ + p_-$ la somme des pressions électronique et ionique, et $m = m_+ + m_-$ la somme des masses (peu différente de la masse ionique).
- La relation de fermeture est ici supposée adiabatique (on peut aussi écrire le système MHD avec d'autres équations de fermeture).

Le système MHD est une description *monofluide* du plasma, puisqu'il ne fait apparaître qu'une seule densité et une seule vitesse, mais il faut se souvenir que c'est en fait le système décrivant l'un ou l'autre des deux fluides (positif ou négatif) d'un système bi-fluide, car dans le cas particulier des variations lentes, les deux fluides ont le même comportement. La densité, en particulier, n'est pas la somme des densités $n_+ + n_- = 2n$ (comme ce serait le cas s'il s'agissait d'un regroupement de populations), mais simplement $n_+ = n_- = n$ (pour des ions monochargés).

Notons qu'au delà du cas du plasma, le système MHD est adapté à la description de la dynamique de tout fluide conducteur (dans lesquels il existe une population d'électrons libres).

c) Forme de la force de Laplace en MHD : Pression et tension magnétique

Le système MHD que nous venons de dériver est identique à celui de la mécanique des fluides, à ceci près qu'il apparaît un terme de force de Laplace dans l'équation d'impulsion et que deux équations de Maxwell doivent donc être ajoutées pour éliminer la variable \mathbf{B} qui est ainsi apparue.

Puisque la densité de courant est directement reliée au champ magnétique par la loi d'Ampère, la force de Laplace est entièrement déterminée par la forme du champ \mathbf{B} :

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_T$$

On voit que la force de Laplace s'écrit comme la somme de deux composantes. La première vaut $\mathbf{F}_p = -\nabla \mathbf{B}^2 / 2\mu_0$ et est donc égale à l'opposé du gradient de pression magnétique (ou densité d'énergie magnétique). Elle se comporte comme une force de pression, qui aura tendance à repousser le plasma des zones de forts champs magnétiques vers les zones de champ plus faible. On parle de force de pression magnétique.

La seconde composante est reliée à la courbure locale du champ \mathbf{B} . On peut l'exprimer plus intuitivement en introduisant le repère de Frenet (\mathbf{b}, \mathbf{n}) associé à la ligne de champ, et s l'abscisse curviligne le long de cette ligne. On peut alors écrire la tension sous la forme

$$\mathbf{F}_T = \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{b} + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0 R} \mathbf{n}$$

où R est le rayon de courbure local de la ligne de champ. On voit que cette force de tension annule en tout point (via son premier terme) la composante parallèle au champ de la pression magnétique.

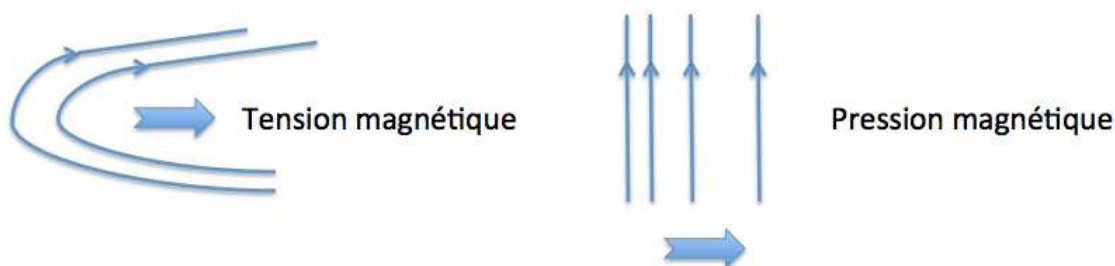


Figure 5 : Les lignes bleues orientées représentent des lignes de champ magnétique. A gauche sont représentées des lignes courbes, et la direction de la force de tension magnétique associée. A droite est représenté un gradient du module du champ B perpendiculaire aux lignes de champ, et la direction de la force de pression magnétique associée.

Ceci est attendu puisque la force de Laplace $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ n'a bien sûr pas de composante dans la direction de \mathbf{B} . La partie restante, perpendiculaire au champ, est inversement proportionnelle au rayon de courbure de la ligne de champ : plus la ligne est courbée, plus la force exercée par le champ sur le plasma (et l'entraînant vers le centre de courbure) est importante (voir Figure 5).

d) Loi d'Ohm

Dans l'équation de Faraday du système MHD, on a éliminé le champ électrique en utilisant : $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Il faut se rappeler néanmoins que, pour la simplicité, on a supposé dès le début du chapitre (cf paragraphe 4.a) que le fluide est « idéal » et que tout effet des collisions y est négligeable. Dans un plasma collisionnel, on est souvent amené à prendre en compte les termes de friction électrons-ions, et on obtient alors :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{j}}{\sigma}$$

où apparaît la conductivité σ du plasma. De façon générale, on appelle cette relation la **loi d'Ohm (généralisée)**. Elle inclut le champ électrique de la loi d'Ohm habituelle $\mathbf{E} = \mathbf{j} / \sigma$ dans le repère où $\mathbf{u} = 0$, auquel vient s'ajouter le champ de changement de repère $-\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. On garde toujours le nom « loi d'Ohm » pour cette relation, même dans le cas non collisionnel $1/\sigma = 0$ (conductivité infinie) alors qu'elle n'inclut dans ce cas que la partie « changement de repère ». Les conséquences de la loi d'Ohm sont importantes en MHD (voir l'appendice B : champ gelé et reconnexion).

e) Conservation de l'énergie

La dernière équation de la partie fluide du système est l'équation de transport de l'énergie cinétique. On y voit que l'énergie cinétique n'est pas conservée au cours du temps, le second membre $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ étant un terme de perte ou de gain. La raison de cette non-conservation réside dans les échanges d'énergie entre champ et particules chargées et on vérifie bien que l'énergie totale (cinétique + électromagnétique) correspond à une équation de transport conservative :

$$\partial_t \left(nm \frac{v^2}{2} + \frac{3}{2} p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{u} \left(nm \frac{u^2}{2} + \frac{5}{2} p \right) + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right] = 0$$

En MHD idéale, les échanges entre l'énergie cinétique et l'énergie électromagnétique sont strictement réversibles. En présence d'une résistivité σ , une partie des transferts devient irréversible (effet Joule).

f) Equilibre MHD

Le système d'équations MHD que nous avons dérivé est adapté à la description des phénomènes plasmas évoluant lentement dans le temps. Il permet en particulier de décrire les situations d'équilibre d'un plasma magnétisé. Cette description est particulièrement importante pour l'étude des dispositifs de fusion par confinement magnétique, dont le but est de contraindre la dynamique du plasma via l'application d'un champ magnétique.

Au vu des équations dérivées en 3b, l'état d'équilibre, caractérisé par $\mathbf{u} = 0$ et $\partial_t = 0$, est décrit par les équations :

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

D'après la première équation, l'état d'équilibre est trouvé lorsque les forces de Laplace exercées par le champ magnétique sur le plasma sont en tout point contrebalancées par les forces de pression internes au plasma. Puisque la force de Laplace n'a pas de composante parallèle au champ, il est aisé de voir que la pression doit être constante le long des lignes de champ, dans un équilibre MHD (les lignes de champ sont des isobares). En utilisant les notions de pression et tension magnétique, on peut réécrire les deux premières équations comme

$$\mathbf{F}_T + \nabla \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

On illustre ainsi une autre propriété : en l'absence de courbure des lignes de champ (et donc de force de tension magnétique), un équilibre MHD est déterminé par la compensation en tout point de la pression cinétique par la pression magnétique. Ou dit autrement, un déséquilibre local des pressions est nécessairement compensé par une force de tension, et donc une courbure des lignes de champ.

Exemples d'équilibre MHD :

Considérons une colonne de plasma, infinie le long de l'axe z . On applique un champ magnétique (ou de manière équivalente on force des courants dans le plasma) dans le but de confiner la colonne, c'est à dire l'empêcher de s'étendre radialement sous l'effet de sa pression interne p . Le problème étant invariant par rotation d'angle θ , et par translation selon z , seule la variable r interviendra donc dans la description. La force de pression s'exerce donc radialement et le confinement doit être réalisé via un champ magnétique selon \mathbf{e}_θ et/ou \mathbf{e}_z . On prend \mathbf{B} de la forme $\mathbf{B} = B_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + B_z(r)\mathbf{e}_z$, qui impose au plasma une force de Laplace radiale, égale à

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}$$

où apparaît bien la décomposition de la force de Laplace en terme de pression et tension, vue précédemment. Un équilibre de la colonne est donc obtenu si la relation suivante entre p et \mathbf{B} est vérifiée en tout point :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0$$

On sépare généralement deux « formules » possibles pour obtenir un équilibre. Celle obtenue en imposant un champ le long de la colonne (selon z), et donc des courants orthoradiaux est appelée configuration θ -pinch (les courants étant selon \mathbf{e}_θ). La condition d'équilibre se résume alors à un simple équilibre de pression en tout point :

$$p(r) + \frac{B^2(r)}{2\mu_0} = \frac{B_{ext}^2}{2\mu_0}$$

où B_{ext} est le champ à l'extérieur de la colonne de plasma (où la pression est nulle).

L'autre configuration possible est celle obtenue en imposant un champ orthoradial, via des courants le long de z . Cette configuration est appelée z -pinch, sa description est un peu plus complexe, puisqu'elle fait intervenir la tension magnétique.

Il faut noter que s'il est possible de trouver assez facilement des conditions sur les profils de pression et de champ magnétique pour obtenir une situation d'équilibre, il n'est pas garanti que ces équilibres soient stables. En l'occurrence, les deux types d'équilibre décrits ici sont sujets à des instabilités. Le contrôle de ces instabilités est un enjeu important pour le développement des dispositifs de confinement magnétique de plasma.

APPENDICE A. EQUATIONS DE TRANSPORT SOUS FORME CONSERVATIVE

a) Equations de transport

Beaucoup des équations qui ont été manipulées dans ce chapitre sont de la forme :

$$\partial_t(a) + \nabla \cdot (\mathbf{b}) = c$$

De telles équations sont appelées des *équations de transport*.

Si a représente la densité volumique d'une quantité A , l'intégration de cette équation sur un volume donné nous dit en effet que la variation temporelle de A (intégrale de $\partial_t(a)$) est due d'une part à un flux de cette quantité à travers les frontières extérieures du volume (intégrale de $\nabla \cdot (\mathbf{b})$) - en tant que « courant » de la quantité scalaire a , \mathbf{b} est homogène à $[a] \cdot \text{vitesse}$ et d'autre part à une création (ou une annihilation) de cette quantité dans le volume (intégrale de c). On peut penser par exemple à la densité d'habitants dans un pays qui varie dans le temps sous l'effet d'une part des flux migratoires à travers les frontières et d'autre part aux naissances et aux décès dans le pays.

Mettre toutes les équations d'un système sous cette forme, quand c'est possible, est extrêmement utile : cela permet d'identifier les « invariants » du problème.

b) Equations conservatives

Une équation de transport est dite « *conservative* » si $c = 0$, c'est à dire s'il n'y a pas de perte ou de gain en volume. On utilise par exemple cette mise en forme pour trouver ce qui est conservé à la traversée d'une discontinuité plane et stationnaire comme une onde de choc. On montre ainsi qu'une équation de la forme ci-dessus est vérifiée (avec $c = 0$), et entraîne la conservation $b_{n1} = b_{n2}$ de la composante normale de \mathbf{b} en amont et en aval de la discontinuité.

La plupart des équations que nous avons écrites (sous leur forme dite Eulérienne), étaient d'emblée sous une forme quasiment conservative, à l'exception des équations d'impulsion et d'énergie pour lesquelles un petit travail supplémentaire est nécessaire.

APPENDICE B. CHAMP GELE ET RECONNEXION

a) Loi d'Ohm et champ gelé

En MHD idéale, la loi d'Ohm s'écrit simplement :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

et elle n'est utilisée dans le système que par l'intermédiaire du rotationnel de \mathbf{E} (loi de Faraday).

A cette relation est associée la notion de repère magnétique (voir chapitre 2) qui confère une identité à chaque ligne de champ magnétique au cours du mouvement : la loi d'Ohm montre que, en tout point, la vitesse perpendiculaire d'une ligne de champ est égale à la vitesse du fluide. On dit que la ligne de force est « gelée » dans le plasma, ce qui signifie que la ligne de force est entraînée et déformée dans le mouvement du fluide comme un traceur passif.

b) Conservation des connexions

On peut ré-énoncer le principe du champ gelé en disant qu'il y a « conservation des connexions », c'est à dire que, en MHD idéale, deux points initialement connectés par une ligne de force restent toujours connectés au cours du mouvement. Ceci signifie qu'un mouvement qui transformerait la figure 6a en la figure 6b est **interdit** par la MHD idéale : on ne peut pas « couper » des lignes de force.

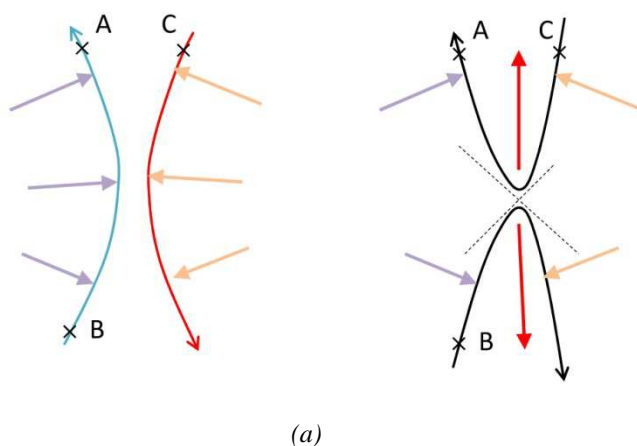


Figure 6. Schéma de reconnexion. En (a), A est connecté à C mais pas à B. En (b), A est connecté à B mais pas à C. En MHD idéale, aucun mouvement du plasma ne peut mener à ce changement des connexions.

On peut démontrer ce théorème de la conservation des connexions en raisonnant sur un élément infinitésimal de fluide ayant la forme d'un petit segment orienté $\delta\mathbf{l}$. Considérons que ce segment a initialement son origine placée en un point O et qu'il est aligné avec le champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$. Au cours du temps, le segment étant entraîné par le flot, il se déplace et sa direction change. Si l'on réussit à montrer qu'il reste toujours aligné avec le champ magnétique existant au point O où se trouve son origine, l'extension à l'ensemble d'une ligne de champ sera évidente.

Soit le vecteur $\delta\mathbf{C} = \delta\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Initialement, on a donc $\delta\mathbf{C} = 0$, ce qui est caractéristique d'un segment aligné. Calculons $d_t(\delta\mathbf{C})$ pour vérifier si le segment reste aligné :

$$d_t(\delta\mathbf{C}) = d_t(\delta\mathbf{l}) \times \mathbf{B} + \delta\mathbf{l} \times d_t(\mathbf{B}) = \delta\mathbf{l} \cdot \nabla(\mathbf{v}) \times \mathbf{B} + \delta\mathbf{l} \times [-\nabla \times (\mathbf{E}) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{B})]$$

En posant, de façon générale $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \Delta \mathbf{E}$ ¹⁴ :

$$d_t(\delta \mathbf{C}) = B \delta l [\partial_{||}(\mathbf{v}) \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times [\partial_{||}(\mathbf{v}) - \nabla \times (\Delta \mathbf{E}) / B]] = [\nabla \times (\Delta \mathbf{E})] \times \delta \mathbf{l}$$

On vérifie que $d_t(\delta \mathbf{C}) = 0$ en MHD idéale puisqu'alors $\Delta \mathbf{E} = 0$; la loi de conservation des connexions est donc bien établie.

Si l'on prend en compte des termes non idéaux, par exemple de la résistivité, cela ajoute un terme $\Delta \mathbf{E}$ non nul correctif à la loi d'Ohm. Le calcul précédent de $d_t(\delta \mathbf{C})$ permet alors de quantifier le flux « reconnecté » par unité de temps.

c) Conservation du flux

Un tube de force est caractérisé par une certaine valeur du flux magnétique. On peut montrer que, en MHD idéale, cette valeur reste constante au cours du mouvement du tube de flux. Ceci est évidemment lié à la conservation du flux à travers la trajectoire cyclotron des particules individuelles (chapitre 2).

d) Reconnexion

Un cas fréquemment étudié est celui où la MHD idéale est valable *presque partout* à l'exception d'une petite région de l'espace, typiquement un « point en X » comme celui représenté sur la figure 6¹⁵.

Le problème de la reconnexion est important pour la raison suivante : une configuration magnétique où toutes les lignes de champ sont antiparallèles comme celles de la figure 6a, a une énergie magnétique plus grande que la configuration 6b où certaines lignes sont connectées. Si la MHD idéale reste valable partout, elle interdit donc au système, pour des raisons topologiques, d'évoluer vers sa configuration d'énergie minimum. Les lignes s'empilent en une couche verticale au centre de la figure et on atteint ainsi un état stationnaire qu'on peut qualifier de « métastable ». Si au contraire, la contrainte de l'idéalité « craque » en un point, il y a reconnexion en ce point et on assiste à une transition rapide vers l'état d'énergie minimum : l'énergie magnétique a enfin la possibilité topologique de diminuer. Pendant la transition, elle se trouve essentiellement convertie en énergie cinétique dirigée (flots verticaux sur la figure 6b), une partie pouvant aussi être dissipée sous forme d'énergie thermique¹⁶.

¹⁴ $\Delta \mathbf{E}$ représente donc l'écart à la loi d'Ohm idéale.

¹⁵ La brisure de l'idéalité peut par exemple être due à une valeur de B qui s'annule au point en X : ceci a pour effet d'annuler le terme d'ordre zéro dans le développement en variations lentes (on se doute bien que la MHD ne peut pas être valide en l'absence de champ magnétique) ; elle peut être également due à d'autres conditions locales, avec B non nul, mais cela sort du cadre de ce cours et nous ne les donnerons pas ici. Quoi qu'il en soit, les gradients de vitesse sont très forts autour du point en X, ce qui rend d'autant plus importants les termes habituellement négligeables : les termes de viscosité ou de résistivité si le milieu est faiblement collisionnel, l'ensemble des termes négligés pour cause de « variations lentes » pour les plasmas sans collision.

¹⁶ On invoque parfois ce phénomène pour expliquer le chauffage de la couronne solaire.

CHAPITRE 5. ONDES DANS LES PLASMAS DANS L'APPROXIMATION FLUIDE

Dans tous les domaines de la physique (mécanique, électricité, etc...), on sait que de nombreuses propriétés d'un système sont déterminées par son **comportement linéaire**. Quand ce système est régi par une équation différentielle ordinaire portant sur le temps, ceci consiste d'abord à déterminer ses **modes propres d'oscillation** (corps solide soumis à une force de rappel, oscillateur RLC,...). Quand le système est régi par une équation différentielle aux dérivées partielles portant sur le temps et sur l'espace, ceci revient à chercher ses **modes propres de propagation** (ondes sonores, évolution de potentiel sur une ligne électrique,...). Ces résultats donnent les premières et indispensables informations sur la façon dont le système réagit : relation de dispersion des ondes, stabilité d'un équilibre, etc... Ils vont aussi nous permettre d'introduire la notion de fréquence de coupure et fréquence de résonance, et de donner un exemple d'application du théorème de gel de ligne de champs. Nous appliquerons la méthode classique de calcul des modes de propagation sur quelques cas d'ondes.

1. CALCUL DES MODES PROPRES DE PROPAGATION : METHODE CLASSIQUE

La méthode, quelque soit le domaine d'application, comporte quatre étapes. Elle a déjà été appliquée au chapitre 1 au cas très simple de l'oscillation plasma.

a) Écriture du système différentiel

Le milieu à analyser est caractérisé par un système différentiel par rapport au temps et à l'espace. Il est sans seconds membres, c'est à dire sans "forçage" ni excitation des modes propres. Un exemple connu de physique générale est le système des équations pour la suppression et vitesses de propagation d'une onde acoustique dans l'air. Dans les plasmas, comme on le verra, plusieurs solutions d'ondes existent.

b) Linéarisation

On linéarise le système précédent au voisinage d'une solution "d'ordre zéro". On décompose toutes les variables u autour de leur valeur dans cette solution :

$$u = u_o + u_1$$

avec l'hypothèse que $u_1 \ll u_o$. Les variables u_o sont supposées connues et *satisfont par hypothèse le système d'équations*. Ceci introduit la notion d'équilibre et en pratique cela revient à définir quel plasma on étudie : un plasma magnétisé ou non magnétisé, au repos ou en mouvement, froid ou chaud. Si notre système est décrit par une équation à plusieurs variables, que on écrit formellement $E(n, \mathbf{v}, p) = 0$, l'équilibre satisfait $E(n_o, \mathbf{v}_o, p_o) = 0$: tous les termes d'ordre zéro du développement en perturbations s'éliminent. La linéarisation du système consiste ensuite à ne retenir que le premier ordre de ce développement (puissance 1). Le résultat est une équation linéaire en n_1, \mathbf{u}_1, p_1 qui s'écrit formellement:

$$n_1 \partial_n (E)_o + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla_u (E)_o + p_1 \partial_p (E)_o = 0$$

Par exemple :

$$\partial_t (nm\mathbf{u}) + \nabla \cdot (nm\mathbf{u}\mathbf{u} + \overline{\mathbf{p}}) \xrightarrow{\text{linéarisation}} \partial_t (n_1 m \mathbf{u}_o + n_o m \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (n_1 m \mathbf{u}_o \mathbf{u}_o + n_o m \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_o + n_o m \mathbf{u}_o \mathbf{u}_1 + \overline{\mathbf{p}}_1)$$

c) Recherche de solutions exponentielles (« algébrisation »)

On cherche les solutions du système qui sont de type « ondes planes progressives et monochromatiques », c'est à dire des solutions pour lesquelles les variations de *toutes* les variables du système sont de la forme :

$$e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

On obtient ainsi un système algébrique à la place du système différentiel. Il suffit pour cela de remplacer :

$$\partial_t \rightarrow -i\omega \text{ et } \nabla \rightarrow i\mathbf{k}$$

Quand nous aurons déterminé les solutions particulières qui vérifient ce système algébrique, nous *admettrons* (pour l'instant) que le système différentiel linéarisé est résolu car la solution générale est toujours une combinaison linéaire de ces solutions particulières (les coefficients étant déterminés par les conditions aux limites du problème). On suppose donc que les solutions exponentielles forment une *base complète* pour l'ensemble des solutions ; la démonstration de cette affirmation et ses limites de validité ne peuvent être étudiés qu'en faisant usage des transformations de Fourier et de Laplace ; nous ne le ferons pas dans ce chapitre car cela est superflu ici. Cependant, nous y reviendrons au chapitre 6 (traitement cinétique) où ces questions sont indispensables à l'obtention et à la compréhension des résultats.

d) Résolution

Le système algébrique ci-dessus est un système homogène (*i.e.* sans seconds membres). On peut l'exprimer sur la forme d'une matrice appliquée aux variables du système. En général, pour ω et \mathbf{k} quelconques, il n'admet donc que la solution *triviale* pour laquelle toutes les variables linéaires sont nulles (pas d'onde). Pour obtenir des solutions autres que la solution triviale, il faut nécessairement que les variables ω et \mathbf{k} vérifient une relation $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$ qui assure l'annulation du déterminant de la matrice du système algébrique. Cette équation est appelée *relation de dispersion* du milieu décrit par le système. Chaque solution de l'équation de dispersion est associée à une direction propre dans l'espace des variables (ou a un sous-espace propre de dimension > 1 en cas de dégénérescence), de même que, pour une matrice, chaque valeur propre est généralement associée à un ensemble de vecteurs propres colinéaires (le calcul se présente en fait généralement sous cette forme). Les directions propres définissent les *polarisations* (au sens large) des différentes solutions.

Si le système physique contient des termes de forçage (dans une certaine mesure, la prise en compte des effets non linéaires faibles peut jouer ce rôle de "seconds membres"), le résultat du calcul ci-dessus apporte tout de même une information importante : on sait que l'effet du forçage sera maximum quand ces termes respectent la relation de dispersion ci-dessus.

Dans les sections suivantes, nous allons nous familiariser avec cette méthode grâce à plusieurs exemples.

2. LE TRAITEMENT FLUIDE DE L'ONDE DE PLASMA

On a déjà introduit dans le chapitre 1 l'oscillation de plasma dans le cas d'un plasma de température nulle, nous allons maintenant inclure les effets de température. Ce type d'onde se nomme onde « haute fréquence », ou onde « électronique ». En effet comme cela a déjà été vu, dans un plasma, les deux espèces principales qui apparaissent, les ions et les électrons, ont une masse très différente. S'il s'agit de protons, le rapport de masse est donné par $m_e/m_p = 1/1836$ ¹⁷. Pour cette raison, si on considère des oscillations rapides, les électrons qui sont les plus légers seront mis en mouvement, mais pas les ions qui se comportent comme un fond neutralisant et immobile.

On peut donc facilement généraliser le calcul de l'oscillation plasma dans le cadre du traitement fluide des ondes dans le plasma. Ceci donne la première application de la méthode décrite dans la section précédente.

Si on considère un plasma chaud, non magnétisé, et au repos (vitesse moyenne nulle), son équilibre est donné par $Zn_{i0} = n_{e0}, \mathbf{u}_{e0} = \mathbf{u}_{i0} = 0, T_e = T_e0, T_i = 0, \mathbf{E}_0 = 0, \mathbf{B}_0 = 0$.

Par analogie à l'étude des oscillations plasma du chapitre 1, nous faisons l'hypothèse que les perturbations qu'on étudie sont associées à un mouvement est unidirectionnel et que les plans bougent selon une direction donnée que nous choisirons comme axe des x . En plus nous faisons l'hypothèse que pour le cas du plasma chaud de façon analogue à ce qu'on avait trouvé dans le chapitre 1, le champ magnétique perturbé est nul et il s'agit toujours des perturbations purement électrostatiques. En effet pour des perturbations purement longitudinales (propagation de l'onde parallèle à la direction du champ) le champ magnétique est toujours nul. La relation de dispersion que on va trouver par contre va être différente de celle du plasma froid, en particulier on va voir que la fréquence dépend du vecteur d'onde. Dans ce cas on parle d'*ondes* plasma (ou ondes de Langmuir) et pas d'*oscillations* plasma.

¹⁷ Le paramètre qui rentre en jeu pour être plus précis est Zm_e/Am_p , où Z est la charge ionique, et A la masse atomique

On pose $n_e = n_{e0} + n_{e1}$, $u_{ex} = u_{e1x}$, $E = E_{1x}$, $T_e = T_{e0} + T_{e1}$ et on rappelle que $p_e = n_e k_B T_e = p_{e0} + p_{e1} = n_{e0} k_B T_{e0} + n_{e0} k_B T_{e1} + n_{e1} k_B T_{e0}$. De par les conditions de plasma choisies toutes les quantités avec indice 0 sont des constantes, et les quantités avec indice 1 dépendent de x et t .

Il n'y a pas de perturbation pour les ions qui sont considérés comme un fond immobile ; comme exercice, le lecteur pourra montrer que la modification induite à la relation de dispersion par le mouvement ionique est négligeable. Les deux premières équations fluides du système s'écrivent (voir chapitre 4):

$$\begin{aligned}\partial_t(n_e) + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) &= 0 \\ \partial_t(n_e \mathbf{u}_e) + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e \mathbf{u}_e) &= -\nabla(p_e) - en_e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

Si on explicite les variables on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t(n_{e0} + n_{e1}) + \nabla \cdot ((n_{e0} + n_{e1}) \mathbf{u}_{e1}) &= 0 \\ \partial_t((n_{e0} + n_{e1}) \mathbf{u}_{e1}) + \nabla \cdot ((n_{e0} + n_{e1}) \mathbf{u}_{e1} \mathbf{u}_{e1}) &= -\nabla(p_{e1}) - e(n_{e0} + n_{e1}) \mathbf{E}_1\end{aligned}$$

où on rappelle que la composante de la vitesse d'ordre zéro est nulle (le plasma est au repos).

Les dérivées des quantités avec indice 0 sont nulles (équilibre), et les termes quadratiques dans les quantités d'ordre 1 sont très petits par rapport aux mêmes quantités à la puissance un. On peut donc les négliger dans ces équations, et on obtient au final les équations linéarisées, pour la géométrie donnée :

$$\text{Conservation du nombre de particules : } \partial_t(n_{e1}) + n_0 \partial_x(u_{e1x}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Conservation de l'impulsion : } n_0 m_e \partial_t(u_{e1x}) + \partial_x(p_{e1}) = -n_0 e E_{1x} \quad (2)$$

Pour « fermer » le système, il faut exprimer la pression en fonction des moments d'ordre inférieur (densité et vitesse). Trouver une « **équation de fermeture** » correcte au système constitue le point difficile de la méthode fluide utilisée et la justification d'une telle équation, si elle existe, ne peut être trouvée sans revenir aux équations cinétiques. L'argument intuitif suivant peut être utilisé : comme il s'agit d'un mouvement rapide, les électrons comprimés n'ont pas le temps d'échanger de l'énergie avec leur voisin dans la partie dilatée, et comme dans une perturbation adiabatique dans un gaz, la température augmente là où il y a compression, et diminue s'il y a dilatation. L'équation de fermeture adiabatique (introduite au chapitre 4) peut être utilisée:

$$\frac{p_{e1}}{p_{e0}} = \gamma \frac{n_{e1}}{n_{e0}} \Leftrightarrow p_{e1} = \gamma k_B T_{e0} n_{e1} = \gamma m_e v_{the}^2 n_{e1} \quad (3)$$

On a introduit la vitesse thermique $v_{the}^2 \equiv \frac{k_B T_{e0}}{m_e}$. Il s'agit de l'équation de fermeture la plus simple (à part l'équation du plasma froid $p_e = p_{e0} = 0$). Le calcul cinétique complet montrera *a posteriori* que cette hypothèse est justifiée tant que les longueurs d'onde sont suffisamment grandes (par rapport à la longueur de Debye) et que dans ce cas, $\gamma = 3$, ce qui correspond à un mouvement adiabatique à une dimension (on rappelle que pour un gaz parfait si on a d degrés de liberté, $\gamma = (d + 2)/d$).

Si on prend la dérivée partielle par rapport à t de l'équation (1) et la dérivée partielle par rapport à x de l'équation (2), après avoir exprimé p_{e1} en fonction de n_{e1} par l'équation (3), on obtient deux équations pour n_{e1} et v_{e1} où on peut facilement éliminer u_{e1} . On obtient ainsi la nouvelle équation régissant les variations de densités dues au champ électrique :

$$(\partial_t^2 - 3v_{the}^2 \partial_x^2)(n_{e1}) = \frac{n_0 e}{m_e} \partial_x(E_{x1}) \quad (4)$$

En éliminant le champ électrique grâce à l'équation de Gauss-Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e(Zn_i - n_e)}{\epsilon_0}$. A l'ordre zéro cette équation correspond à $\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$; $n_{e0} = Zn_{i0}$, et une fois linéarisée elle prend la forme

$$\partial_x(E_{x1}) = -en_{e1} / \epsilon_0 \quad (5)$$

L'équation régissant l'évolution de la densité s'écrit maintenant :

$$\boxed{(\partial_t^2 + \omega_{pe}^2 - 3V_{the}^2 \partial_x^2)(n_{e1}) = 0} \quad (6)$$

En plus des termes déjà trouvés en plasma froid dans le chapitre 1, on voit que l'on a cette fois un terme en V_{the}^2 qui couple l'oscillation temporelle avec la variation spatiale. Cela modifie la propagation de l'oscillation de plasma.

On obtient l'équation de dispersion des ondes en cherchant les solutions sous forme d'ondes planes monochromatiques de la forme $e^{i(kx - \omega t)}$, et l'équation (6) devient :

$$(-\omega^2 + \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{the}^2)(n_{e1}) = 0$$

On a une solution non-triviale ($n_{e1} \neq 0$) seulement si ω et k sont liés par la relation de dispersion (voir figure 1) :

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{the}^2$$

qui est la relation de dispersion des ondes plasma ou ondes de Langmuir. On voit ainsi apparaître tous les paramètres caractéristiques du phénomène : pulsation ω_{pe} , vitesse de phase limite $\sqrt{3}v_{the}$ et longueur caractéristique au voisinage de laquelle se manifestent les effets de température sur la neutralité du plasma $\lambda_d = v_{the}/\omega_{pe}$ (longueur de Debye). On voit aussi qu'il y a cette fois propagation de l'énergie, la vitesse de groupe n'étant plus nulle (vitesse de groupe v_g et vitesse de phase v_ϕ variant en sens inverse et respectant : $v_g v_\phi = 3 v_{the}^2$), et c'est pour cela que on parle maintenant d'ondes et plus d'oscillation. Dans la limite où la température du plasma est faible ($3k^2 v_{the}^2 \ll \omega_{pe}^2$) on retrouve bien le résultat du chapitre 1 et la relation de dispersion pour un plasma froid, $\omega = \omega_{pe}$.

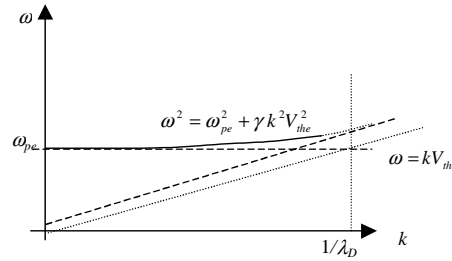


Figure 1. Relation de dispersion en plasma chaud (théorie fluide)

Ce résultat fluide simple est correct pour $k \ll 1/\lambda_d$ (échelles assez grandes ou plasma pas trop chaud) ; il devient moins juste pour des k plus grands : il ne peut être considéré que comme le premier ordre d'un développement en $k\lambda_d$. Quand k s'approche de $1/\lambda_d$, non seulement l'augmentation de ω n'est alors plus exactement celle calculée, mais surtout le fait même de calculer des ondes planes monochromatiques en $e^{-i\omega t}$ devient faux. Le calcul cinétique complet, au chapitre 6, montrera que pour ces longueurs d'onde, avec une condition initiale maxwellienne, les seules solutions qui existent sont des **ondes amorties** (« amortissement Landau ») c'est à dire des solutions en $e^{-i\omega t - \gamma}$. Ceci est dû aux échanges d'énergie qui existent entre l'onde et certaines particules dites « résonnantes » dont la vitesse est égale à la vitesse de phase; aucune théorie fluide ne peut mener à un tel résultat.

3. AUTRES MODES DE PROPAGATION « ELECTRONIQUES »

La première des simplifications du calcul de la section précédente a consisté à négliger le mouvement des ions. Ceci est justifié *a posteriori* par le résultat obtenu puisque, aux fréquences de l'ordre de (ou supérieures à) la fréquence plasma ω_{pe} , les ions, trop lourds, peuvent effectivement être considérés comme immobiles (en particulier $\omega_{pe} \gg \omega_{pi}$) ; nous resterons ici dans ce cadre, qui caractérise les modes qualifiés d'« électroniques ». Dans cette section, nous chercherons s'il existe d'autres solutions dans cette gamme de fréquences hautes. Pour $\omega \gg \omega_{pe}$, facilement satisfait si le plasma a une densité très faible, on peut deviner par exemple qu'on retrouvera les habituelles ondes électromagnétiques dans le vide $\omega = kc$. Puisque les ions sont considérés comme immobiles, nous n'avons pas besoin d'écrire d'équations pour l'évolution des ions, et la seule équation faisant intervenir les ions est l'équation de neutralité globale à l'équilibre que nous utiliserons dans les équations de Maxwell si nécessaire $Zn_{i0} = n_{e0} = n_0$.

a) Système d'équations

Le système d'équations à analyser pour une solution électromagnétique s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t(n_e) + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0 \\ n_e m_e \partial_t(\mathbf{u}_e) + n_e \cdot \mathbf{u}_e \nabla(\mathbf{u}_e) + \nabla(p_e) = -n_e e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) \\ d_t(p_e/n_e^\gamma) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = -e \frac{n_e - Zn_i}{\epsilon_0} \\ \nabla \times (\mathbf{E}) = -\partial_t(\mathbf{B}) \\ \nabla \times (\mathbf{B}) = -\mu_0 e(n_e \mathbf{u}_e - Zn_i \mathbf{u}_i) + \frac{1}{c^2} \partial_t(\mathbf{E}) \end{cases}$$

Les équations fluides utilisées sont identiques à celles étudiées dans la section précédente, à l'exception du terme en $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ introduit dans l'équation de transport de l'impulsion qu'il faut garder en principe car maintenant on cherche des solutions avec champ magnétique. En conséquence, la variable \mathbf{B} étant présente cette fois dans le système, il faut *a priori* utiliser l'ensemble des équations de Maxwell pour boucler le système et pas seulement l'équation de Maxwell-Gauss comme dans l'introduction¹⁸. Notons que, pour ces fréquences, le courant de déplacement n'est pas négligé. Notons aussi qu'on a supposé une pression scalaire et une équation de fermeture de type polytrophe. Comme il a été dit, ces approximations se révéleront *a posteriori* correctes (avec $\gamma=3$) tant que $k \ll 1/\lambda_D$.

b) Ondes électromagnétiques dans un plasma froid non-magnétisé. Fréquence de coupure.

On considère un plasma froid, c'est-à-dire où l'on peut négliger les effets de température. Ceci revient à poser $T_e = 0$ partout. Par ailleurs l'équilibre considéré est le même que dans la section précédente $Zn_{i0} = n_{e0}$, $\mathbf{u}_{e0} = \mathbf{u}_{i0} = 0$, $T_i = 0$, $\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = 0$.

Dans ce cas, on n'a que deux équations pour la description du plasma, qui vont coupler densité et vitesse du fluide électronique et il est alors possible d'écrire les équations *linéarisées* pour les variables n_{e1} et \mathbf{u}_{e1} . Comme il s'agit de modes électromagnétiques, on doit introduire des perturbations du champ électrique et magnétique : on aura donc en plus les variables \mathbf{E}_1 et \mathbf{B}_1 . Au final le terme $(\mathbf{u}_{e1} \times \mathbf{B}_1)$ est négligé car d'ordre deux.

¹⁸ En pratique, l'équation portant sur la divergence du champ électrique est redondante. Pour un mode électronique électrostatique on peut utiliser de façon équivalente l'équation de Maxwell-Gauss ou l'équation de Maxwell-Ampère. Pour un mode électromagnétique on doit considérer l'équation de Maxwell-Ampère et les équations portant sur les divergences se déduisent des équations écrites dès qu'elles sont vérifiées dans la condition initiale.

$$\partial_t(n_{e1}) + n_{e0}\nabla \cdot (\mathbf{u}_{e1}) = 0 \quad (7)$$

$$m_e \partial_t(\mathbf{u}_{e1}) = -e(\mathbf{E}_1) \quad (8)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E}_1) = -\partial_t(\mathbf{B}_1) \quad (9)$$

$$\nabla \times (\mathbf{B}_1) = -\mu_0 en_{e0} \mathbf{u}_{e1} + \frac{1}{c^2} \partial_t(\mathbf{E}_1) \quad (10)$$

Les équations de Maxwell (9) et (10) imposent que ces champs soient orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation, car la vitesse \mathbf{u}_{e1} est parallèle au champ électrique par l'équation (8).

On peut combiner les deux dernières équations de Maxwell pour obtenir une équation de propagation d'ondes et s'affranchir de la variable \mathbf{B}_1 :

$$\partial_t^2(\mathbf{E}_1) - c^2 \Delta(\mathbf{E}_1) = -\frac{en_{e0}}{\epsilon_0} \partial_t \mathbf{u}_{e1} \quad (11)$$

On a donc trois équations pour trois inconnues, n_{e1} , \mathbf{u}_{e1} , \mathbf{E}_1 et on obtient l'équation de dispersion des ondes en cherchant les solutions planes monochromatiques de la forme $e^{i(kx - \omega t)}$ pour toutes les variables. Le système d'équations (7), (8) et (11) devient un système algébrique :

$$\begin{aligned} -i\omega n_{e1} + in_{e0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{e1} &= 0 \\ -i\omega m_e \mathbf{u}_{e1} &= -e\mathbf{E}_1 \\ -\omega^2 \mathbf{E}_1 + c^2 k^2 \mathbf{E}_1 &= i\omega \frac{en_{e0}}{\epsilon_0} \mathbf{u}_{e1} \end{aligned}$$

Si on examine la première équation, on constate que, la perturbation de vitesse étant parallèle au champ électrique et orthogonale au vecteur d'onde, le produit scalaire (deuxième terme de l'équation) est nul. En conséquence, la perturbation de densité est nulle : il n'y a pas de perturbation de densité pour une onde électromagnétique qui se propage dans un plasma non-magnétisé.

On peut résoudre maintenant très simplement le système des deux équations restantes par substitution : on calcul \mathbf{u}_{e1} à partir de la deuxième équation en on injecte dans la troisième. On obtient la relation de dispersion :

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2} \quad (12)$$

On voit bien à partir de la relation de dispersion que les fréquences des ondes électromagnétiques dans le plasma sont toujours supérieures à ω_{pe} , donc l'hypothèse de haute fréquence qu'on a faite au début pour traiter les ions comme immobiles est bien justifiée.

Pour $\omega \gg \omega_{pe}$, on retrouve bien la dispersion connue $\omega = kc$ des ondes électromagnétique dans le vide et leur polarisation transversale (venant du courant de déplacement). Le plasma se comporte pour les hautes fréquences comme un milieu très raréfié proche du vide. Pour des fréquences décroissantes, on s'éloigne de cette solution du vide pour atteindre ce qu'on appelle une coupure en $\omega = \omega_{pe}$. Par analogie avec les diélectriques on peut introduire l'indice optique du milieu comme le rapport entre la vitesse de phase des ondes électromagnétiques dans le vide sur la vitesse de phase des ondes dans le milieu considéré : $n = \frac{ck}{\omega}$. Si n (ou k) tend vers zéro pour une valeur finie de la fréquence, on dira qu'il s'agit d'une *fréquence de coupure*. Si on utilise

la relation de dispersion, l'indice optique du plasma est alors donné par $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}$.

Premièrement on remarque que l'indice optique du plasma est réel seulement si $\omega > \omega_{pe}$. En particulier si $\omega = \omega_{pe}$, l'indice n et le vecteur d'onde k tendent vers 0, la fréquence plasma est une fréquence de coupure pour les ondes électromagnétiques. Si $\omega < \omega_{pe}$, le vecteur d'onde devient imaginaire, et on peut définir une longueur d'évanescence ou de pénétration de l'onde plasma : $L_p = \frac{c}{\omega_{pe} \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_{pe}^2}}$. Les ondes de fréquence

plus faible que la fréquence de coupure *ne se propagent donc pas dans le plasma*, mais elles sont en partie absorbées et en majorité réfléchies.

Deuxièmement si $\omega > \omega_{pe}$ l'onde électromagnétique peut se propager, mais dans ce cas l'indice optique est plus petit que 1, en opposition à l'indice optique des diélectriques courants. Ceci est dû au fait que la vitesse de phase d'une onde électromagnétique dans un plasma est plus grande que la vitesse de la lumière mais pas la vitesse de groupe qui est liée à la vitesse de phase par $v_g v_\phi = c^2$. Le résultat est qu'un rayon lumineux qui entre dans un plasma va s'éloigner de la normale (à l'opposé de ce qui se passe quand il rentre dans l'eau ou le verre). Une lentille plasma avec de bords fin sera divergente et une lentille plasma avec des bords épais sera convergente.

Si on combine ces résultats on déduit qu'une onde électromagnétique qui traverse un plasma *de densité croissante* ne peut se propager que jusqu'au point où $\omega_{pe} = \omega$. L'ionosphère, par exemple, empêche de recevoir au sol les ondes électromagnétiques en provenance de l'espace qui ont une fréquence inférieure à 6-10 MHz (fréquence plasma correspondant à la densité électronique maximale de l'ionosphère), où réfléchit les ondes basse fréquence émises sur Terre comme illustré sur la figure 2. On remarque que le vecteur d'onde de l'onde

électromagnétique varie selon la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}$. Dans cette formule, la fréquence ω est constante et ω_{pe} augmente. Au début $\omega > \omega_{pe}$, mais à fur-et-à mesure ω_{pe} se rapproche de ω , donc k diminue (et la longueur d'onde λ augmente, comme on voit sur la figure 2). Si k diminue, l'indice de réfraction n diminue et la direction de propagation change, car le vecteur d'onde s'éloigne de plus en plus de la normale selon la loi de Snell (voir figure), jusqu'à ce que le vecteur d'onde soit égale à zéro et l'onde soit réfléchi. Nous pouvons remarquer aussi dans la figure que l'amplitude de l'onde augmente, ceci est lié à la conservation de l'énergie¹⁹.

Finalement on remarque que l'hypothèse des ions immobiles est bien satisfaite, car la condition d'existence de ces ondes est que la fréquence soit supérieure à la fréquence plasma électronique, et donc il s'agit toujours d'un mouvement très rapide par rapport au temps de réaction des ions qui ont une grande inertie.

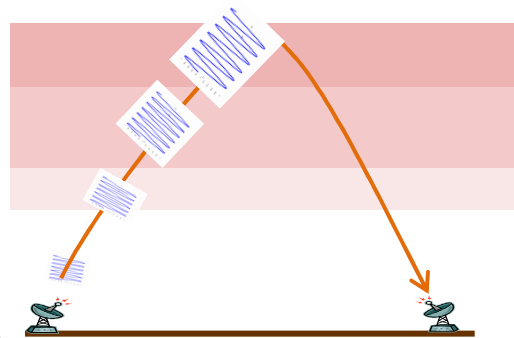


Figure 2. Une onde électromagnétique de fréquence ω est réfléchi par les couches externes de l'ionosphère. L'onde se propage si $\omega > \omega_{pe}$, mais comme la densité plasma (et donc ω_{pe}) augmente, à partir d'un certain point $\omega_{pe} = \omega$ et l'onde est réfléchi.

c) Ondes « électroniques » dans un plasma magnétisé.

Nous allons reprendre ici le calcul de façon plus générale, sans faire d'hypothèse sur la polarisation, et en élargissant au cas d'un champ magnétique statique \mathbf{B}_0 non nul. Les ondes qu'on veut étudier ici sont toujours des modes à « haute fréquence » et donc on pourra considérer les ions comme un fond immobile neutralisant, sans résoudre des équations pour les ions.

Les équations fluides utilisées sont identiques à celles étudiées dans la section précédente, et cette fois le terme $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ introduit dans l'équation de transport de l'impulsion donne une contribution à l'ordre un, car

¹⁹ Cela peut être démontré en traitant le plasma comme un milieu diélectrique de permittivité diélectrique relative $\epsilon = n^2$, où n est l'indice optique du plasma.

maintenant on a un champ magnétique d'équilibre \mathbf{B}_0 et le terme $\mathbf{u}_{e1} \times \mathbf{B}_0$ est non négligeable. Donc, au lieu de trouver une relation de dispersion comme l'équation (12), on va trouver plusieurs relations de dispersion, associées à différentes polarisations des ondes, qui permettent d'annuler le déterminant du système d'équations.

Il est commode, pour expliciter le résultat et étudier les propriétés des solutions, de choisir un repère où le vecteur d'onde est selon x et où \mathbf{B}_0 est dans le plan x, z : cela permet de distinguer facilement les solutions dont la polarisation en \mathbf{E} est parallèle à \mathbf{k} (composante longitudinale ou électrostatique) et celles qui sont perpendiculaires à \mathbf{k} (composantes transversales). On trouve alors, en introduisant l'angle θ entre \mathbf{k} et \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} \omega^2 - \omega_{pe}^2 - \gamma k^2 V_{the}^2 & -i \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\omega} \omega_{ce} \sin \theta & 0 \\ i \omega \omega_{ce} \sin \theta & \omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 & -i \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\omega} \omega_{ce} \cos \theta \\ 0 & i \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\omega} \omega_{ce} \cos \theta & \omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 \end{bmatrix}$$

En l'absence de champ magnétique, les quatre termes non diagonaux sont nuls, la résolution est donc très simple. Il existe trois modes, dont deux identiques, correspondant à l'annulation de chacun des trois termes de la diagonale, ce sont les modes qu'on a calculés dans la première partie.

- Les deux solutions identiques ont pour relation de dispersion $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$, et elles ont des polarisations transverses (rien ne distingue les directions transverses y et z en l'absence de \mathbf{B}_0). Ces solutions correspondent, comme c'était prévisible, au prolongement des ondes électromagnétiques dans le vide. On remarque que même si le plasma est chaud, il n'y a pas de contribution de la pression à des modes transverses, la relation de dispersion est la même que pour le plasma froid.

- Le troisième mode a pour dispersion $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 V_{the}^2$ et il a une polarisation strictement longitudinale : c'est donc exactement le mode électrostatique qu'avait fourni le calcul simple, sans aucune modification. On voit que ce mode n'est pas une modification des modes du vide, mais bien une solution distincte et supplémentaire.

d) Rôle du champ magnétique statique

En présence d'un champ magnétique statique, c'est à dire pour ω_{ce} non nul, on voit que les trois modes ci-dessus se trouvent "couplés". Leurs dispersions et leurs polarisations deviennent hybrides : le mode initialement électrostatique acquiert une composante transversale et réciproquement. On peut regarder brièvement le cas où les ondes se propagent perpendiculairement au champ magnétique. Dans ce cas $\cos \theta = 0$ et $\sin \theta = 1$. Une solution qui rend le déterminant nul est la solution habituelle pour les modes transverses, $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$. On appelle ce mode le mode *ordinaire*. Les autres solutions correspondent à la condition

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{\omega^2 - (\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2)}$$

(pour simplifier on a négligé les effets de température électronique et on a posé $v_{the} = 0$). On appelle ces solutions les modes *extraordinaires*. A partir de cette relation nous pouvons constater que si $\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} \equiv \omega_H$, le vecteur d'onde k diverge. On appelle cette fréquence la fréquence hybride haute. Cette fréquence est une fréquence de résonance : on parle de fréquence de résonance quand il existe une valeur finie de la fréquence telle que pour cette valeur le vecteur d'onde (ou l'indice optique) tend vers l'infini. Si on est près d'une résonance, les ondes vont être absorbées par le milieu. On peut aussi calculer les fréquences de

coupure (fréquences pour lesquelles le vecteur d'onde devient nul, comme dans le cas d'une onde électromagnétique dans un plasma non-magnétisé). On obtient deux fréquences de coupures

$$\omega_D = \frac{1}{2} \left[\omega_{ce} + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right]$$

$$\omega_G = \frac{1}{2} \left[-\omega_{ce} + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right]$$

L'onde extraordinaire se propage seulement si $\omega_G < \omega < \omega_H; \omega > \omega_D$.

Dans le cas d'une propagation parallèle au champ magnétique ($\cos\theta=1$ et $\sin\theta=0$), on a les mêmes fréquences de coupure, qui correspondent à deux modes : un qui se propage avec une polarisation circulaire vers la droite, et l'autre avec une polarisation circulaire vers la gauche (voir exercice dans les autocorrectifs).

Les deux modes transverses, qui étaient identiques en l'absence de champ magnétique, se distinguent l'un de l'autre (modes *ordinaire* et *extraordinaire*). Toutes ces modifications restent faibles si $\omega_{ce} \ll \omega_{pe}$, mais elles sont maximum au voisinage de l'intersection des modes, c'est à dire près de $\omega = \omega_{pe}$ (Figure 3). On voit qu'alors l'oscillation de plasma n'est notablement modifiée par la présence de \mathbf{B}_0 que pour les petits k , là où la vitesse de phase est de l'ordre de la vitesse de la lumière et où le courant de déplacement joue un rôle.

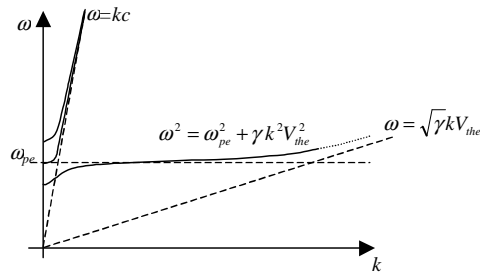


Figure 3. Relation de dispersion fluide en présence d'un faible champ magnétique.

4. SYSTEME A DEUX FLUIDES. MODES DE PROPAGATION BASSE FREQUENCE.

Dans un plasma on peut aussi exciter des modes basse fréquence, pour lesquels le mouvement des ions et pas seulement des électrons est important. On va voir deux exemples, les ondes acoustiques ioniques dans un plasma non magnétisé, et les ondes d'Alfvén transverses dans un plasma magnétisé.

a) Les ondes acoustiques-ioniques. Fréquence de résonance.

On considère un plasma chaud non magnétisé, homogène, au repos. Son équilibre est défini par

$$\sum n_{i0} = n_{e0}, \mathbf{u}_{e0} = \mathbf{u}_{i0} = 0, T_e = T_{e0}, T_i = T_{i0}, \mathbf{E}_0 = 0, \mathbf{B}_0 = 0.$$

Le système d'équations à analyser s'écrit :

$$\begin{cases}
d_t(n_e) + n_e \nabla \cdot (\mathbf{u}_e) = 0 \\
n_e m_e d_t(\mathbf{u}_e) + \nabla(p_e) = -n_e e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) \\
d_t\left(\frac{p_e}{n_e \gamma_e}\right) = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
d_t(n_i) + n_i \nabla \cdot (\mathbf{u}_i) = 0 \\
n_i m_i d_t(\mathbf{u}_i) + \nabla(p_i) = Zn_i e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) \\
d_t\left(\frac{p_i}{n_i \gamma_i}\right) = 0
\end{cases}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}) = -e \frac{n_e - Zn_i}{\epsilon_0}$$

On remarque qu'on a utilisé deux indices $\gamma_{i,e}$ différents car les électrons et les ions ne vont pas répondre de la même façon aux sollicitations liées à la propagation de l'onde. Pour ce qui concerne les ions, il s'agit de compressions et décompressions rapides sur leur échelle de temps, ils n'ont pas le temps d'échanger de l'énergie et donc ils ont un comportement adiabatique proprement dit, à une dimension, donc $\gamma_i=3$. Pour ce qui concerne les électrons il s'agit de compressions et décompressions très lentes sur leur échelle de temps, donc ils ont le temps d'échanger de l'énergie et de lisser les gradients de température et ils ont un comportement isotherme, c'est-à-dire $\gamma_e=1$, (température constante). Tout cela peut être vérifié *a posteriori*, en comparant la vitesse de phase de l'onde avec la vitesse thermique des particules pour chaque espèce : la vitesse de phase est faible devant la vitesse thermique des électrons, et plus grande ou du même ordre que la vitesse thermique des ions. Les équations linéarisées, pour des solutions d'ondes planes du type $e^{i(kx - \omega t)}$, ont la forme :

$$\begin{cases}
-i\omega n_{e1} + n_{e0} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{e1} = 0 \\
-i\omega n_{e0} m_e \mathbf{u}_{e1} + ik_B T_{e0} \mathbf{k} n_{e1} = -n_{e0} e \mathbf{E}_1
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
-i\omega n_{i1} + n_{i0} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{i1} = 0 \\
-i\omega n_{i0} m_i \mathbf{u}_{i1} + 3ik_B T_{i0} \mathbf{k} n_{i1} = Zn_{i0} e \mathbf{E}_1
\end{cases}$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = -e \frac{n_{e1} - Zn_{i1}}{\epsilon_0}$$

Avant de résoudre ce système algébrique, on peut encore faire une simplification et négliger l'inertie des électrons dans l'équation du transport de mouvement. Cela revient à négliger $\omega n_{e0} m_e \mathbf{u}_{e1}$ devant $k_B T_{e0} \mathbf{k} n_{e1}$ et on pourra à nouveau vérifier *a posteriori* que cette hypothèse est satisfaite car la vitesse de phase de l'onde est petite devant la vitesse thermique des électrons. La solution de ce système nous permet d'identifier la relation de dispersion des ondes acoustiques-ioniques.

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k^2 c_{s0}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} + k^2 c_{s0}^2 \left(\frac{3T_{i0}}{ZT_{e0}} \right)} \quad (19)$$

Ici $c_{s0}^2 = Zk_B T_{e0} / m_i$, il s'agit de la vitesse acoustique-ionique, qui dépend de la température électronique et de l'inertie ionique; en pratique la vitesse de propagation de l'onde correspond à cette vitesse, car le deuxième terme proportionnel à la température ionique reste petit. En effet, comme on le verra dans le chapitre 6 la condition d'existence de ces ondes impose $ZT_{e0}/T_{i0} \gg 1$, dans le cas contraire le calcul cinétique complet montrera que les seules solutions qui existent sont des ondes amorties (« **amortissement Landau** »), c'est-à-dire des solutions en $e^{-i\omega t - \gamma t}$.

Si on compare la vitesse de phase de l'onde avec la vitesse thermique électronique on voit que le rapport est égale à $\sqrt{m_e/m_i}$, et donc beaucoup plus petite : l'hypothèse qu'on avait utilisé pour négliger l'inertie des électrons est bien satisfaite.

En plus pour des grandes longueurs d'ondes, on peut négliger $k^2 \lambda_{De}^2$ au dénominateur devant 1. Ceci revient à considérer l'hypothèse de quasi-neutralité, c'est à dire $n_{e1} \approx Zn_{i1}$, et à négliger le champ électrique E_1 dans l'équation de Maxwell-Gauss, mais attention, cela ne veut pas dire que le champ électrique est nul, il est juste petit et il faut le garder dans les autres équations, car c'est justement lui qui lie les mouvements ionique et électronique.

Pour finir, on observe le phénomène de *résonance*, qu'on a déjà introduit pour les ondes électromagnétiques en présence d'un champ magnétique externe. Si nous négligeons le dernier terme de l'équation (19) qui doit être petit pour que l'onde existe, on peut calculer k à partir de la relation de dispersion et

on obtient $k^2 = \frac{1}{\lambda_{De}^2} \frac{\omega^2}{\omega_{pi}^2 - \omega^2}$, où nous avons utilisé la relation $c_{s0} = \lambda_{De} \omega_{pi}$, avec $\omega_{pi}^2 = \frac{n_{i0} Z^2 e^2}{\epsilon_0 m_i}$. A

partir de cette relation nous pouvons constater que si $\omega = \omega_{pi}$, $k \rightarrow \infty$. Ceci est la définition d'une **fréquence de résonance**, quand il existe une valeur finie de la fréquence telle que pour cette valeur le vecteur d'onde (ou l'indice optique) tend vers l'infini. En général $\omega < \omega_{pi}$. Si on est près d'une résonance, les ondes vont être absorbées par le milieu, et si on a un système avec densité décroissante, la fréquence restera la même mais les longueurs d'ondes vont diminuer (et les vecteurs d'onde augmenter), jusqu'à ce que les ondes soient absorbés.

b) Les ondes d'Alfvén. La loi du gel des lignes des champs.

Les ondes d'Alfvén²⁰ sont des ondes électromagnétiques de basse fréquence qu'on peut exciter dans un plasma magnétisé au repos. On peut négliger les effets de température, car ils ne participent pas à la propagation de ces ondes. L'équilibre est donné par (figure 4)

$$Zn_{i0} = n_{e0}, \mathbf{u}_{e0} = \mathbf{u}_{i0} = 0, T_e = 0, T_i = 0, \mathbf{E}_0 = 0, \mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z.$$

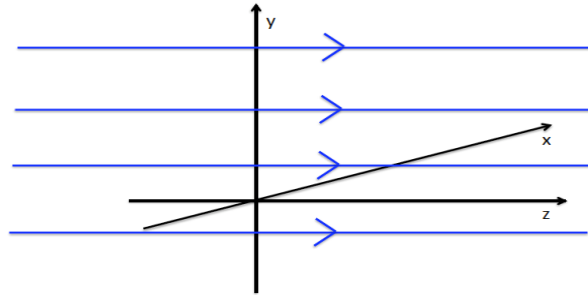


Figure 4. Le champ magnétique d'équilibre B_0 pour les ondes d'Alfvén

On considère par hypothèse des ondes qui se propagent *selon la direction du champ magnétique d'équilibre*, qu'on a choisie selon la direction z . Dans ce cas les solutions de type onde sont de la forme $e^{i(kz - \omega t)}$. On fait aussi l'hypothèse que les solutions sont des modes transverses (direction de propagation, champ électrique et champ magnétique perpendiculaires) avec par exemple $\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{B}_1 = B_1 \mathbf{e}_y$. Comme on a déjà fait pour les ondes électromagnétiques électroniques, on peut combiner l'équation de Maxwell-Ampère avec celle de Maxwell-Faraday et s'affranchir de la variable champ magnétique, en tenant compte du fait que pour ce mode il faut garder la contribution des électrons *et* des ions au courant. L'équation résultante, linéarisée, est donné par :

$$\partial_t^2 (\mathbf{E}_1) - c^2 \Delta (\mathbf{E}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_t (\mathbf{j}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_t (Zn_{i0} \mathbf{u}_{i1} - n_{e0} \mathbf{u}_{e1}).$$

Les équations de conservation de la masse ne donnent aucune information utile car la perturbation de densité est nulle pour ces ondes, comme pour les autres ondes électromagnétiques, par contre les équations du

²⁰ Elles sont aussi appelées parfois ondes d'Alfvén torsionnelles, quand on appelle les autres modes de basse fréquence dans un plasma magnétisé les ondes d'Alfvén compressionnelles (qu'on ne traite pas ici), ou ondes magnétosonores lente et rapide.

mouvement pour les ions et les électrons linéarisées sont un peu plus compliquées que ce que on a déjà vu, à cause de la présence du champ magnétique d'équilibre. Projetées sur les axes, elles prennent la forme :

$$\begin{cases} -i\omega m_e u_{e1,x} = -e(E_1 + u_{e1,y} B_0) \\ -i\omega m_e u_{e1,y} = e u_{e1,x} B_0 \\ -i\omega m_i u_{i1,x} = Ze(E_1 + u_{i1,y} B_0) \\ -i\omega m_i u_{i1,y} = -Ze u_{i1,x} B_0 \end{cases}$$

On peut facilement résoudre ce système et obtenir les vitesses en fonction du champ électrique pour coupler avec l'équation de Maxwell-Gauss. On obtient

$$\begin{cases} u_{e1,x} = -i \frac{e}{m_e \omega} \frac{E_1}{\left(1 - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)} \approx 0 \\ u_{e1,y} = \frac{e}{m_e \omega} \frac{|\omega_{ce}|}{\omega} \frac{E_1}{\left(1 - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)} \approx -\frac{E_1}{B_0} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} u_{i1,x} = i \frac{Ze}{m_i \omega} \frac{E_1}{\left(1 - \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2}\right)} \approx -i \frac{Ze}{m_i \omega} \frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2} E_1 \\ u_{i1,y} = \frac{e}{m_i \omega} \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{E_1}{\left(1 - \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2}\right)} \approx -\frac{E_1}{B_0} \end{cases} \quad (22)$$

Les fréquences cyclotron électronique ω_e et ionique ω_i utilisées ici ont été introduites au Chapitre 2. Par hypothèse on étudie des modes basse fréquence, on a donc les égalités approchées pour les équations (21)-(22) qui correspondent à la limite basse fréquence, $\omega \ll \omega_{ci} \ll \omega_{ce}$. On voit tout de suite que les électrons et les ions bougent ensemble selon la direction y, et donc il y a un mouvement, mais pas de courant, car les charges se compensent exactement. Ce mouvement est dû à la vitesse de dérive $\mathbf{V}_m = \frac{\mathbf{E}}{B} \times \mathbf{b}$ introduite au Chapitre 2. Par contre il y a un courant dans la direction x qui est dû au mouvement ionique. Donc l'équation de propagation de l'onde électromagnétique prend la forme :

$$\omega^2 E_1 - c^2 k^2 E_1 \approx i \omega \frac{en_{e0}}{\epsilon_0} n_{i0} u_{i1,x}$$

Si on combine cela avec l'équation pour $u_{i1,x}$, on obtient la relation de dispersion des ondes d'Alfvén :

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + \frac{v_A^2}{c^2}} \quad (23)$$

où on a introduit la vitesse d'Alfvén $v_A = \sqrt{\frac{B_0^2}{m_i n_{i0} \mu_0}}$. Ce mode a été calculé pour la première fois par Alfvén

(prix Nobel, 1942). En général la vitesse d'Alfvén est beaucoup plus petite que la vitesse de la lumière $V_A \ll c$, et on a $\omega \approx k V_A$. Dans le cas général de la propagation oblique, la relation de dispersion devient $\omega = k_{\parallel} V_A$. Il est intéressant d'essayer de visualiser ces ondes, en effet si on dessine les lignes de champs des ondes d'Alfvén, elles se comportent comme des ondes qui se propagent sur une corde rigide, où la ligne de champ prend la place de la corde (Figure 6).

Sur la figure 5 on a explicité à un temps donné et en deux positions les directions de \mathbf{B}_1 , \mathbf{E}_1 et de la vitesse de dérive $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ en haut. On voit que la vitesse du plasma est vers le bas pour le premier point, et vers le haut pour le deuxième. Si on regarde comment bouge la ligne de champ dans la figure du bas à deux temps successifs, on voit qu'elle se déplace de la même façon.

La ligne bouge vers le bas ou le haut à la vitesse $v_l = \frac{\omega}{k} \frac{|B_1|}{|B_0|} = \frac{|E_1|}{|B_0|}$, ou la deuxième égalité vient de

l'équation de Maxwell-Faraday. Donc la ligne de champ est modifiée par la propagation de l'onde de la même façon que le plasma, comme si la ligne de champ était gelée dans le plasma (pas de mouvement relatif). C'est un exemple d'application du théorème du gel des lignes de champs, déjà introduit dans le Chapitre 4. Si on excite ces ondes dans un cylindre magnétisé, avec le champ d'équilibre dans la direction axiale, le champ électrique sera radial, et le champ magnétique perturbé et le mouvement de dérive seront azimutaux, ce qui produit une torsion des lignes de champ.

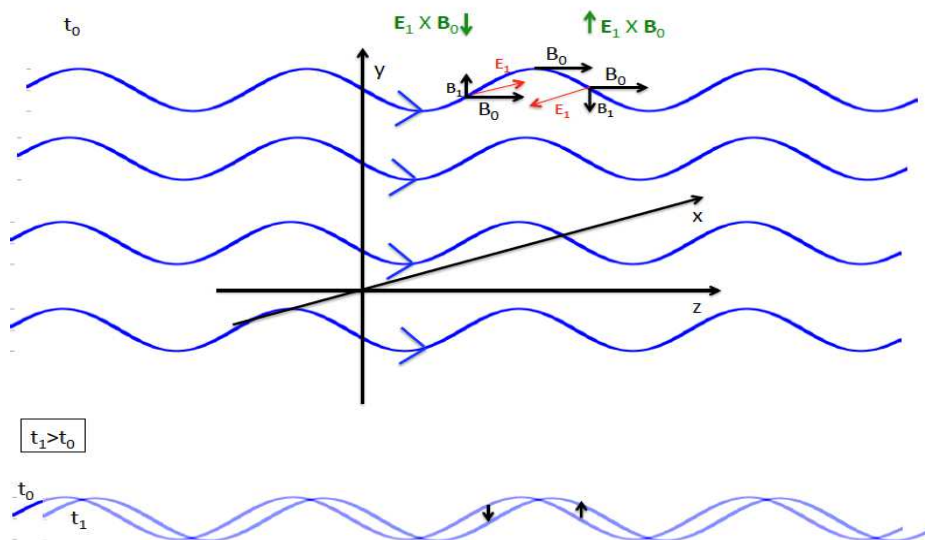


Figure 5. Ondes d'Alfvén, les perturbations de champ magnétiques et électriques ont été exagérées volontairement. En haut on montre une image à un temps donné, en bas on montre une ligne de champ à deux temps successifs (propagation vers la droite).

* Guidage du mode d'Alfvén

Le mode d'Alfvén a une fréquence qui ne dépend que de k_{\parallel} . La vitesse de groupe est donc parallèle à \mathbf{B} : on dit que c'est un mode guidé. Cela lui donne une grande importance dans les plasmas, car une perturbation sur ce mode peut se propager grâce à cela très loin de sa cause : ce mode ne connaît pas l'amortissement géométrique en $1/r^2$ des modes qui se propagent de façon isotrope comme le mode sonore. La présence par exemple d'un corps conducteur dans un plasma magnétisé en mouvement perturbe ce plasma extrêmement loin²¹.

5. EXCITATION DES ONDES DANS UN PLASMA

Comme on a vu dans ce chapitre plusieurs types d'onde peuvent se propager dans un plasma. Selon le type d'onde que l'on veut étudier on peut utiliser un modèle différent pour le plasma, (ions mobiles ou immobiles, traitement à deux fluides ou MHD). Ceci revient à faire des approximations sur la réponse du plasma à la sollicitation que nous étudions. Les approximations peuvent être faites a priori (mais justifiable a posteriori !); par exemple si on utilise la MHD on n'étudie que la réponse basse fréquence du plasma, on n'a pas développé le

²¹ Derrière un conducteur qui se déplace dans un champ magnétique (par exemple un satellite -naturel ou artificiel- dans la magnétosphère d'une planète), on montre qu'il existe une sorte de « sillage magnétique » sous forme de deux cylindres très longs et inclinés par rapport à la direction du mouvement qu'on appelle des « ailes d'Alfvén ».

calcul dans ce chapitre, mais par exemple le lecteur intéressé peut montrer que on retrouve bien la relation de dispersion des ondes d'Alfvén à partir des équations MHD. Autrement nous pouvons résoudre le système dans sa globalité et faire les simplifications à la fin. Cette deuxième méthode est beaucoup plus lourde du point de vue du calcul, et il vaut mieux choisir l'approche la plus directe pour chaque type d'onde étudié.

Une différence importante est liée à l'équilibre choisi, nous n'avons pas les mêmes solutions si le plasma à l'équilibre est magnétisé ou pas, ou si, à l'équilibre il y a un mouvement relatif entre les espèces. La possibilité d'exciter une onde dans un plasma dépend des conditions aux limites, de la présence de fluctuation de densité ou de champ magnétique, ou de la présence d'un terme de forçage. Par exemple on pourra exciter des ondes électromagnétiques avec une antenne et les faire propager dans un plasma. Les ondes de plasma électroniques peuvent être excitées par des faisceaux d'électrons qui traversent un plasma. En laboratoire une grille chargée soumise à un potentiel pulsé dans un plasma peut être utilisée pour exciter des ondes électroniques ou acoustiques ioniques, et plusieurs ondes peuvent coexister en même temps selon les conditions d'excitation. Un laser qui se propage dans un plasma peut aussi exciter des ondes plasma électroniques ou des ondes acoustiques ioniques par couplage non-linéaire avec le plasma. L'univers est principalement constitué de plasma. C'est donc aussi un laboratoire d'exception pour étudier le développement de nombreuses instabilités et ondes. Elles peuvent en particulier être étudiées en détail grâce à des mesures in-situ des particules et des champs (électrique et magnétique) dans l'environnement des planètes et le milieu interplanétaire. Les ondes de plasma et les ondes acoustiques ioniques sont ainsi connues pour être à l'origine des émissions électromagnétiques les plus intenses émises par le soleil dans le domaine radio (100 kHz - 20 MHz). Ces ondes sont associées à des faisceaux d'électrons se propageant dans le milieu interplanétaire à la suite soit d'une éruption dans la haute atmosphère solaire, soit d'une accélération en amont d'onde de choc interplanétaire. Les ondes plasma ont aussi un rôle très important dans le transfert d'énergie entre différentes échelles spatiales, et entre espèces (ions, électrons) ne pouvant pas sinon échanger de l'énergie compte tenu de leur masse (et donc leur inertie) différentes.

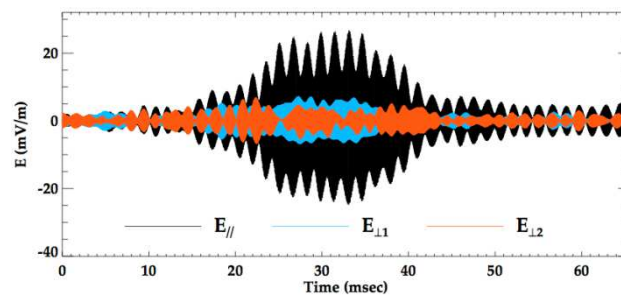


Figure 6. Exemple d'une forme d'onde (amplitude en fonction du temps) électrique observée dans le milieu interplanétaire, associée à une éruption sur le Soleil. Les trois couleurs correspondent aux trois composantes du champ électrique le long du champ magnétique interplanétaire (en noir) ou perpendiculairement (en rouge et bleu). N.B. On ne peut pas résoudre dans la figure la fréquence plasma, les oscillations qu'on voit sont liées à un phénomène de battement. NASA@STEREO/WAVE

D'autres types d'ondes sont aussi observées telles que les ondes d'Alfvén dans l'ionosphère de la Terre (autour de 1Hz), dans le milieu interplanétaire ou dans les boucles coronales du Soleil. Dans ce dernier cas, elles sont suspectées de participer au chauffage de la couronne solaire, l'un des grands mystères de la physique solaire depuis plus de vingt ans. Les planètes émettent un rayonnement électromagnétique en région aurorale. La figure 7 illustre comment un spectrogramme (diagramme temps-fréquence) des ondes peut permettre d'identifier quand le satellite qui fait les mesures traverse la région d'émission du rayonnement.

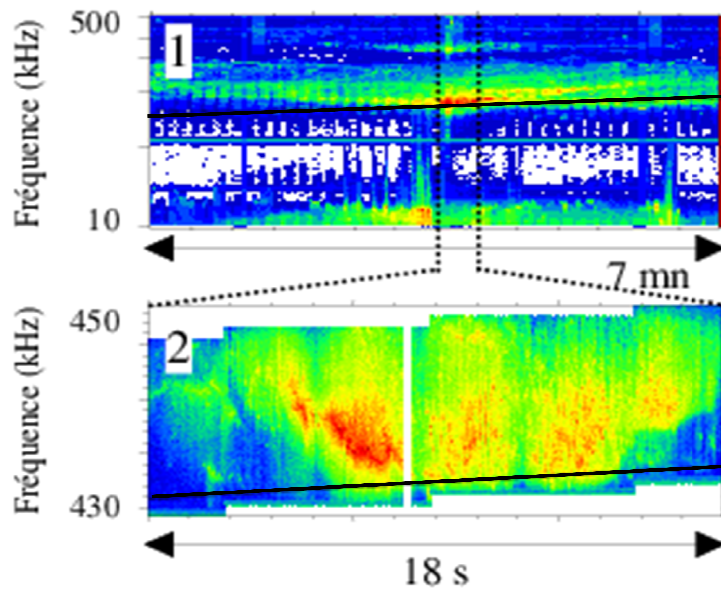


Figure 7. Rayonnement Kilométrique Terrestre. Spectrogramme des ondes observées par les satellites Viking (en haut) et FAST (en bas) en région aurorale (en ordonnée la fréquence et en abscisse le temps, le code couleur traduit l'intensité des ondes. A grande échelle on note la forme en V aplati du spectre du rayonnement ; le minimum du V coïncide avec la fréquence cyclotron locale des électrons, ce qui suggère que l'émission se fait à cette fréquence et qu'au cours de la propagation la fréquence augmente. A haute résolution temporelle, le spectre apparaît composé d'un grand nombre de structures fines dérivant en fréquence (partie basse de la figure).

Un résumé des diverses ondes qui peuvent se propager dans un plasma est donné ci-dessous. Il inclut les exemples vus dans ce chapitre, mais pas seulement. On rappelle aussi les définitions de fréquence de coupure et résonance.

Récapitulatif des principaux modes de propagation possibles dans un plasma

Modes	Mouvement plasma	Condition	Relation de dispersion	Nom
Electro- statiques	Electrons (haute fréquence)	$\vec{B}_0 = 0$ ou $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{the}^2$	Onde plasma (onde de Langmuir)
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0$	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 \equiv \omega^2_H$	Oscillation hybride haute
	Electrons et ions (basse fréquence)	$\vec{B}_0 = 0$ ou $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = \frac{k^2 c^2 s_0}{1 + k^2 \lambda_{de}^2} + k^2 c^2 s_0 \left(\frac{3T_{i0}}{ZT_{e0}} \right); c^2 s_0 \equiv \frac{Zk_B T_{e0}}{m_i}$	Onde acoustique- ionique
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0$ (presque)	$\omega^2 = \omega_{ci}^2 + k^2 c^2 s_0$	Onde de cyclotron ionique électrostatique
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0$ (identiquement)	$\omega^2 = \frac{1}{(\omega_{ci} \omega_{ce})^{-1} + \omega_{pi}^{-2}} \equiv \omega^2_{LH}$	Oscillation hybride basse
Electro- magnétiques	Electrons (haute fréquence)	$\vec{B}_0 = 0$	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$	Ondes lumineuses
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0, \vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$	Onde ordinaire
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0, \vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$	$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_H^2}$	Onde extraordinaire
		$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ (polarisation circulaire droite)	$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 / \omega^2}{1 - (\omega_{ce} / \omega)}$	Mode Droit (onde de Sifflement)
	$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ (polarisation circulaire gauche)	$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 / \omega^2}{1 + (\omega_{ce} / \omega)}$	Mode Gauche	
	Electrons et ions (basse fréquence)	$\vec{B}_0 = 0$		Pas de solution
		$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + v_A^2 / c^2}$	Onde d'Alfvén torsionnelle
$\vec{k} \perp \vec{B}_0$		$\omega^2 = k^2 \frac{c^2 s_0 + v_A^2}{1 + v_A^2 / c^2}$	Onde de compression (magnétosonore)	

Rappel des définitions :

Fréquence de coupure : on dit que une fréquence ω est une fréquence de coupure si le vecteur d'onde associé à cette fréquence $k(\omega)=0$. Dans ce cas l'indice optique du milieu aussi est égal à zéro. Une fréquence de coupure est associée en générale à la réflexion.

Fréquence de résonance : on dit que une fréquence ω est une fréquence de résonance si le vecteur d'onde associé à cette fréquence $k(\omega)=\infty$. Dans ce cas l'indice optique du milieu tend aussi vers l'infini. Une fréquence de résonance est associée en générale à l'absorption.

APPENDICE A. LE DIAGRAMME CMA

Ce diagramme illustre la variété des modes de propagation possibles dans un plasma magnétisé et résume leurs propriétés. Il doit son nom à ses inventeurs Clemmow-Mullaly-Allis. Sa validité est limitée aux plasmas à température nulle, $T_e = T_i = 0$. Le diagramme présenté ici est tiré du livre de F. Chen, Introduction to Plasma Physics.

Il s'agit d'un outil pour trouver dans un plasma donné les modes qui peuvent se propager. Il a donc une abscisse graduée proportionnellement à la densité et une ordonnée proportionnellement au champ magnétique. Une onde de fréquence donnée correspond à un point du diagramme. La pulsation est normalisée par rapport aux pulsations caractéristiques ω_p et ω_c des électrons. Les différentes zones du diagramme sont délimitées par des fréquences de coupure (cut-off) ou des résonances. A l'intérieur de chaque région du plan un petit dessin montre les propriétés des ondes qui peuvent se propager. Ces solutions dépendent non seulement des propriétés du plasma mais aussi de la direction de propagation (Figure 8).

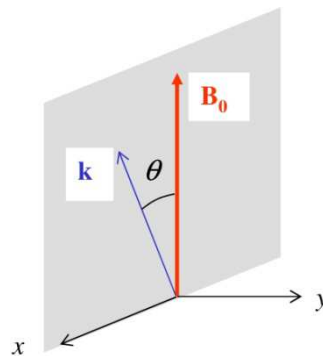


Figure 8. Définition de l'angle θ .

Les propriétés de la solution sont résumées par un petit dessin qui indique comment varie la vitesse de phase en fonction de l'angle θ . La Figure 9 montre le principe : il faut imaginer que la direction verticale est celle du champ magnétique, la solution a forcément une symétrie cylindrique autour de la direction du champ. Mais il n'y a pas forcément une solution pour tous les angles de propagation (voir Figure 10).

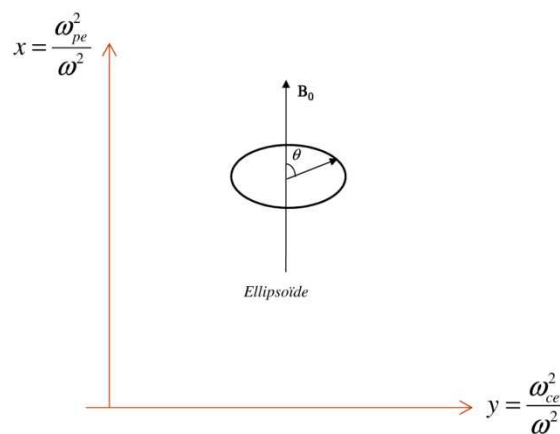


Figure 9. Cas où il y a toujours une solution quelque soit l'angle de propagation.

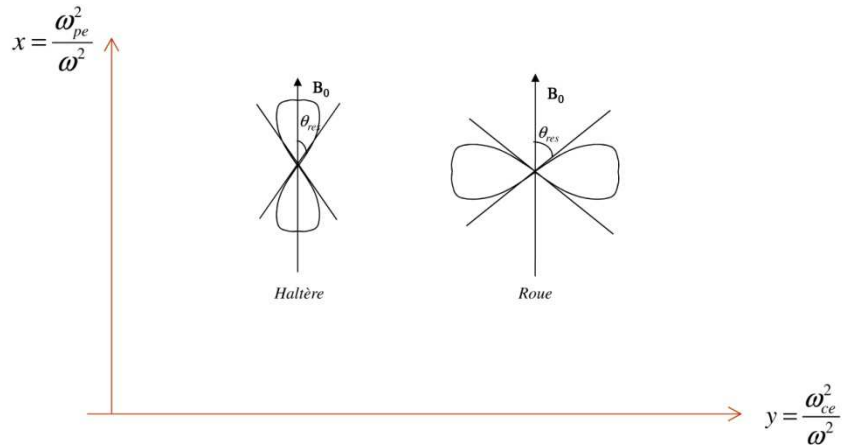


Figure 10. Cas où il n'y a pas de solution pour tous les angles de propagation. A gauche le cas où il n'y a pas de propagation que dans la direction quasi-parallèle, surface en forme d'halète. A droite, cas où il n'y a pas de propagation que dans la direction quasi-perpendiculaire, surface en forme de roue.

Dans le diagramme complet on voit que dans une région donnée du plan il peut y avoir 0, 1 ou 2 solutions suivant le nombre de schémas (ellipsoïde, roue, etc...) qui sont superposés.

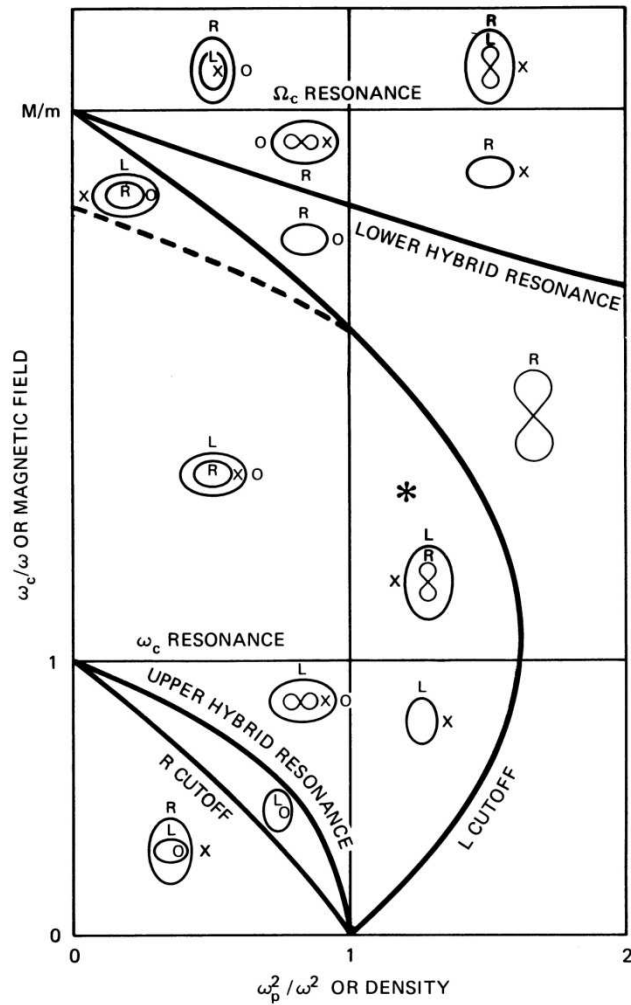


Figure 11. Diagramme CMA tiré de Introduction to Plasma Physics de F. Chen. R et L signifient « right » et « left », X et O « extraordinary » et « ordinary ».

CHAPITRE 6. EFFETS CINÉTIQUES. AMORTISSEMENT LANDAU.

Ce n'est que dans les limites de certaines approximations que l'évolution d'un plasma peut être décrite avec une bonne précision par les modélisations fluides qui viennent d'être présentées. De façon générale, aucun système fermé d'équations fluides ne peut décrire complètement les phénomènes dans un plasma sans collision et il faut utiliser une description dite « cinétique ». Celle-ci consiste à caractériser le milieu, non pas par les quelques premiers moments de la fonction de distribution seulement, mais par la fonction de distribution complète, et donc à utiliser, non pas un système fluide, mais l'équation cinétique adaptée : l'équation de Vlasov. Le calcul des modes propres de propagation, dans ces conditions, est alors moins simple (système intégro-différentiel) : nous le décrirons ici en détail pour le cas fondamental déjà présenté : l'onde de plasma. Nous verrons que les effets cinétiques apportent une différence importante par rapport aux résultats des calculs fluides, c'est l'apparition d'un amortissement de l'onde appelé « amortissement Landau ».

1. RECHERCHE DES SOLUTIONS « ONDES » DU SYSTEME VLASOV/ MAXWELL

a) Système d'équations

Nous nous plaçons dans le même cadre théorique que celui utilisé aux chapitres 1 et 5 pour étudier les oscillations et ondes de plasma (« onde de Langmuir »). Cela signifie que nous faisons les hypothèses suivantes :

- le plasma est globalement neutre, $n_{0e} = Zn_{0i}$,
- il n'y a pas de champ magnétique statique dans le milieu,
- les fréquences sont suffisamment hautes pour que les ions puissent être considérés comme immobiles (on n'écrira pas dans ces calculs les indices e pour préciser que l'on raisonne sur les électrons),
- les ondes sont purement électrostatiques,
- on suppose le problème à une seule dimension x (on notera simplement $E_x = E$ et $v_x = v$).

De telles fluctuations existent en théorie fluide, comme on l'a montré au chapitre précédent ; on admet que cela reste vrai en théorie cinétique. Nous allons étudier la modification des résultats (et des raisonnements qu'il faut faire) quand on reproduit cette étude en théorie cinétique.

Le système à résoudre comporte deux types d'inconnues : une fonction qui dépend du temps et de l'espace et une fonction qui dépend du temps, de l'espace et de la vitesse. La première est la composante longitudinale du champ électrique $E(x,t)$ et la seconde est la fonction de distribution des vitesses électroniques $f(x,v,t)$, qui est équivalente à l'infini des variables scalaires que sont les moments macroscopiques des électrons (n, u, p, \dots). Les deux équations qui permettent de résoudre sont l'équation de Vlasov et l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\begin{cases} \partial_t(f) + v\partial_x(f) - \frac{eE}{m}\partial_v(f) = 0 \\ \partial_x(E) = -\frac{e}{\epsilon_0}(n - Zn_i) \end{cases}$$

Le premier moment pour les électrons $n(x,t) = \int dv f(x,v,t)$ apparaît explicitement dans l'équation de Maxwell. C'est l'aspect intégro-différentiel de ce système qui amène quelques propriétés intéressantes, et aussi quelques difficultés mathématiques. Les ions par contre sont considérés comme immobiles et froids, donc ils sont complètement décrits par la densité (leur premier moment) qui est une constante $n_i = n_{0i}$. On n'a donc pas besoin d'une équation pour décrire la fonction de distribution ionique dont on suppose qu'elle n'évolue pas.

Nous allons maintenant appliquer le programme de calcul de la méthode classique présentée précédemment pour les systèmes fluides (simplement différentiels), pour calculer les modes propres de ce système cinétique.

b) Résolution « classique »

La méthode consiste d'abord à linéariser ce système ; cette première étape ne présente pas de difficulté.

On n'a ici que deux inconnues, $f(x,v,t)$ et $E(x,t)$, qu'on suppose données par un équilibre et une partie linéaire : $f=f_0+f_1$ et $E=E_0+E_1$, avec $f_1 \ll f_0$. En linéarisant autour d'un état d'équilibre où $n_0 = \text{cte} = Z n_{0i}$, (i.e. $f_0=f_0(v)$ telle que $n_0 = \int f(v)dv$) et $E_0 = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} (\partial_t + v\partial_x)(f_1) = \frac{e\partial_v(f_0)}{m} E_1 \\ \partial_x(E_1) = -\frac{e}{\epsilon_0} n_1 \end{cases} \quad \text{avec } n_1 = \int dv f_1(v)$$

On peut encore tenter de réaliser l'étape suivante, c'est à dire chercher s'il existe des solutions exponentielles pour lesquelles *toutes* les variables du système varient comme $e^{ikx-i\omega t}$ (en particulier $E_1 = \tilde{E}_1 e^{i(kx-\omega t)}$, avec \tilde{E}_1 constante complexe). On obtient ainsi le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} (v - \omega/k)f_1 = \frac{e\partial_v(f_0)}{ikm} E_1 \\ E_1 = -\frac{e}{ik\epsilon_0} n_1 \end{cases} \quad \text{avec } n_1 = \int dv f_1(v)$$

Soulignons que ces équations reposent sur l'hypothèse que les solutions particulières recherchées sont « complètement » monochromatiques au niveau microscopique : la fonction de distribution est ici supposée varier en $e^{ikx-i\omega t}$ avec les mêmes fréquences et nombre d'onde pour toutes les vitesses v . Ceci est une hypothèse beaucoup plus forte que de supposer seulement que les quelques premiers moments, n , u , p , ... sont monochromatiques, comme on le fait en théorie fluide. Ce point se révélera être un point critique par la suite.

C'est lorsqu'on tente de résoudre le système précédent que l'on constate les difficultés. Une résolution naïve consiste à écrire :

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{ie}{km} \frac{\partial_v(f_0)}{v - \omega/k} E_1 \\ E_1 &= -\frac{e}{ik\epsilon_0} \int dv f_1 \end{aligned}$$

En remplaçant f_1 calculée par la première équation dans la deuxième on obtient

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{e^2}{k^2 m \epsilon_0} \int dv \frac{\partial_v(f_0)}{v - \omega/k} \right] E_1 &= 0, \text{ c'est à dire :} \\ \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} I(\omega/k) \right] E_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{avec } I(\omega/k) = \int dv \frac{\partial_v(f_0)/n_0}{v - \omega/k}$$

Comme E_1 est non nul, la seule façon d'avoir une solution au système est d'avoir

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} I(\omega/k) = 0$$

Ce qui, en analogie avec ce qu'on a calculé dans les chapitres précédents, devrait permettre d'arriver à la relation de dispersion des ondes plasma. Cependant on se trouve confronté à une difficulté pour le calcul de l'intégrale. On constate immédiatement que ce résultat n'a pas de sens tant que ω/k est *réel* : l'*intégrale* $I(\omega/k)$ n'est en effet *pas définie* dans ce cas puisqu'elle possède un pôle en $v = \omega/k$ (sauf si le numérateur $\partial_v(f_0)$ était nul pour cette valeur particulière de la vitesse, ce qui serait un cas très particulier).

On verra dans la suite comment traiter mathématiquement ce problème, mais dans un premier temps essayons de comprendre ce qui signifie physiquement le pôle qui apparaît au dénominateur.

On voit bien ainsi que la méthode classique ne peut pas s'appliquer sans précaution en théorie cinétique. Il existe toujours, en effet, un certain nombre (plus ou moins grand mais en général non nul) de particules de la fonction de distribution qui vérifient $v = \omega/k$; c'est l'existence de ces particules, dites « *résonnantes* » qui nécessitent de modifier la méthode de résolution. La théorie fluide au contraire, qui ne faisait apparaître qu'une seule vitesse, la vitesse fluide u d'oscillation de l'ensemble des particules, masquait les problèmes éventuels liés à ces résonances.

2. PARTICULES RESONNANTES

a) Définition

Dans les cas où il existe une solution particulière en $e^{-i\omega t}$ d'amplitude constante ou presque constante, c'est-à-dire avec une pulsation qui peut être complexe $\omega = \omega_r + i\omega_i$ mais vérifiant $\omega_i \ll \omega_r$, les particules de vitesse égale à (ou proche de) de la vitesse de phase de l'onde sont appelées "*particules résonnantes*" :

$$v_\phi = \frac{\omega_r}{k}$$

La vitesse de phase v_ϕ est aussi appelée vitesse de résonance pour les particules. On a vu que cette vitesse s'introduit naturellement, d'un point de vue mathématique, lors de la recherche des modes propres. Nous allons maintenant voir, d'un point de vue physique, pourquoi les particules résonnantes jouent un rôle important pour les effets cinétiques. Dans le "repère de l'onde" (c'est à dire le repère se déplaçant à la vitesse v_ϕ), ces particules sont à peu près immobiles, et elles voient donc un champ électrique quasi-statique. Il est donc prévisible que le champ influence très fortement leurs trajectoires et qu'elles constituent des agents privilégiés pour les échanges d'énergie entre champs et particules. C'est l'existence de ces particules résonnantes qui fait que le traitement linéaire présenté jusqu'ici demande à être complété. Commençons donc par étudier les trajectoires de ces particules.

b) Dynamique des électrons dans le champ de l'onde

Supposons que l'onde existe et étudions la dynamique des électrons dans le champ de l'onde. N.B. l'indice 0 ici n'est pas utilisé pour indiquer une situation d'équilibre comme dans la partie précédente, mais des quantités constantes, il s'agit toujours de petites perturbations. On considère la partie réelle de $E_1 = \tilde{E}_1 e^{i(kx - \omega t)}$ et on choisit une phase ($\varphi = 0$) pour écrire sa valeur dans l'espace réel $E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$.

Pour étudier plus précisément le rôle des particules résonnantes, on effectue un changement de repère pour se placer dans le repère de l'onde. Dans ce repère, caractérisé par $x' = x - v_\phi t$, le champ est stationnaire et s'écrit

$$E(x',t) = E_0 \cos(kx')$$

La conservation de l'énergie permet d'écrire l'équation qui relie vitesse et position d'un électron dans ce repère:

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = \frac{e}{k} E_0 (\cos kx' - \cos kx_0)$$

avec comme conditions initiales pour la particule dans le repère de l'onde, x_0 et v_0 . Cette équation ne peut pas se résoudre de manière simple, mais on peut discuter des valeurs que peut prendre la vitesse v . On constate que cette vitesse ne pourra s'annuler le long de la trajectoire de l'électron que si $v_0^2 \leq \frac{2e}{mk} E_0 (1 + \cos kx_0)$, c'est-à-dire si

la vitesse initiale de l'électron est assez petite, dans le repère de l'onde. Revenant dans le repère fixe, cela signifie que les électrons dont la vitesse initiale est proche de la vitesse de phase de l'onde pourront avoir une vitesse qui s'annule. A l'inverse les autres garderont une vitesse peu différente de leur vitesse initiale et seront donc peu perturbés par la présence de l'onde. Cette situation est résumée sur la figure 1 qui représente les trajectoires individuelles des électrons dans l'espace des phases $\{x, v\}$ sous l'effet du champ électrique. On ne considère sur cette figure que les particules avec une vitesse positive dans le repère de l'onde (i.e. qui dans le repère du laboratoire vont un peu plus vite que l'onde, l'image serait symétrique en bas pour les particules un

peu plus lentes, ou avec vitesse négative dans le repère de l'onde). On voit que, pour une amplitude donnée (et constante) du champ électrique de l'onde, les particules se séparent en deux classes. Celles qui sont au dessus de la ligne en gras ont initialement une vitesse suffisamment différente de la vitesse de résonance et sont "*passantes*", c'est-à-dire elles sont légèrement accélérées et décélérées en fonction du signe du champ qui oscille en espace, mais en moyenne elles vont garder la même vitesse. Celles qui sont au dessous de la ligne par contre ont une vitesse initiale très proche de la vitesse de l'onde et donc oscillent sur place, "*piégées*" dans un puits de potentiel de l'onde et leur vitesse passe par zéro dans ce repère. Dans la figure on n'a représenté que les vitesses positives (> 0), mais les vitesses changent de signe (direction) en passant par zéro, c'est-à-dire que les particules restent toujours approximativement au même endroit dans l'espace. Ces dernières particules dessinent dans l'espace des phases ce qu'on nomme des "boucles de piégeage".

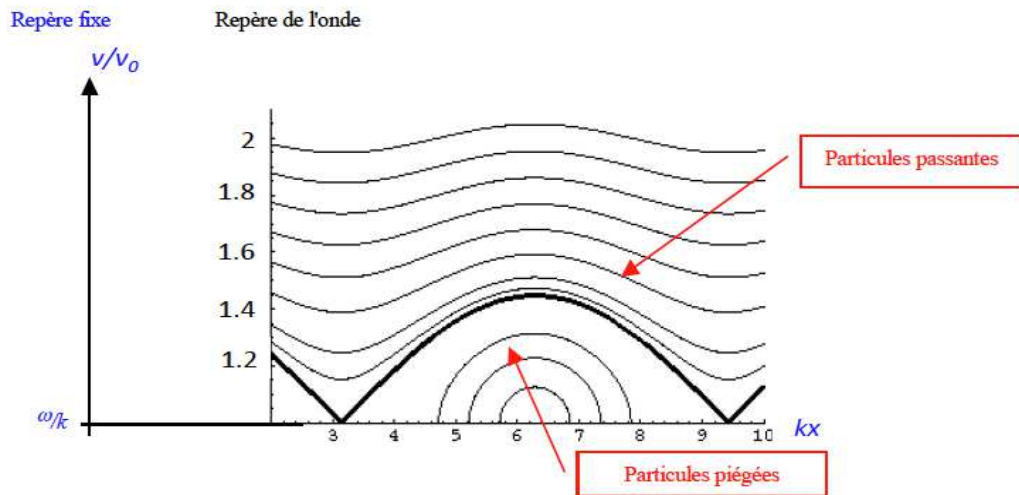


Figure 1. Trajectoires individuelles des électrons dans un potentiel électrostatique sinusoïdal, partie positive. Les trajectoires sont calculées en imposant la conservation de l'énergie dans le repère de l'onde.

En vertu de l'équation de Vlasov, ces trajectoires représentent aussi les isocontours de la fonction de distribution. Pour toutes les vitesses v correspondant à des trajectoires passantes, ceci a la conséquence suivante : si on admet que la fonction de distribution est stationnaire dans le repère de l'onde en un point x_0 (ce qui serait le cas dans ce repère pour un mode propre cinétique purement monochromatique), on peut en déduire qu'elle l'est partout et on peut calculer sa valeur en tout autre point x . De cette façon, l'hypothèse d'une variation sinusoïdale du champ entraîne la forme de la variation de $f_1(v)$; on peut vérifier que celle-ci est également à peu près sinusoïdale, au moins pour les vitesses ne s'approchant pas trop de la séparatrice (où les effets non linéaires se font sentir). Pour les vitesses correspondant aux particules piégées, il en va tout autrement : l'information sur leur fonction de distribution en un point reste confinée dans une boucle de piégeage et l'hypothèse d'un champ sinusoïdal n'a aucune conséquence sur la forme de la variation en x de $f_1(v)$ pour les vitesses correspondantes ; cette variation, d'une boucle à l'autre, peut être quelconque. Tout ce qu'on peut affirmer, pour un champ d'amplitude constante, c'est que le nombre de particules piégées va rester constant (et c'est ce nombre qui intervient dans le couplage "résonnant" avec le champ). A l'inverse, pour une onde amortie, la distinction entre particules piégées et particules passantes n'est pas absolue : la diminution de l'amplitude de l'onde amène un nombre croissant de particules à se "dépiéger". N.B. Dans tous les cas on reste dans l'hypothèse que la variation des vitesses des particules associée au champ électrique est faible devant leur vitesse initiale, c'est-à-dire que les particules piégées gardent une vitesse proche de la vitesse de phase dans le repère du laboratoire, $\delta v \ll v_\phi$ et de même pour les autres particules non-résonnant ayant vitesse v_{nr} , la variation reste faible $\delta v \ll v_{nr}$.

c) Estimation des échanges d'énergie entre l'onde et un électron

Comme dans les paragraphes précédents, on suppose que l'onde existe sans chercher à vérifier cette hypothèse. Le traitement du problème n'est donc pas auto-cohérent.

Dans cette section on reste dans le repère du laboratoire et on écrit le champ électrique de l'onde sous la forme complexe $E(x,t) = E_0 \exp[i(kx - \omega t)] e^{\delta t}$. Le facteur exponentiel traduit une application (croissance) lente de l'onde et va éviter des divergences dans la suite du calcul. δ est une constante positive telle que $\delta \ll \omega$, la croissance est très faible pendant plusieurs périodes.

On considère un électron qui est au point de l'espace des phases caractérisé par $x_0 = v_0 t + x_0^0$ et $v_0 = \text{constante}$. Sous l'effet du champ électrique, cet électron va passer en $x = x_0 + x_1$ et $v = v_0 + v_1$. Formellement cela revient à linéariser les équations du mouvement des particules en disant que l'effet du champ électrique est une petite perturbation par rapport à leur mouvement libre. En particulier, on peut supposer en première approximation qu'il est dans un champ uniforme qui ne dépend plus que du temps, car il ne dépend de x qu'au travers de $x_0 = v_0 t + x_0^0$. Les équations du mouvement linéarisées sont donc

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= v_0; \frac{dv_0}{dt} = 0 \Rightarrow v_0 = \text{cste}; x_0 = x_0^0 + v_0 t \\ \frac{dx_1}{dt} &= v_1; \frac{dv_1}{dt} = -\frac{e}{m} E_0 \exp(i k x_0^0 + i k v_0 t - i \omega t + \delta t) \end{aligned}$$

On en déduit l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{eE}{m(\delta + i(kv_0 - \omega))} = -\frac{eE}{mD} \\ x_1 &= -\frac{eE}{m(\delta + i(kv_0 - \omega))^2} = -\frac{eE}{mD^2} \end{aligned}$$

où on a défini $D = \delta + i(kv_0 - \omega)$. Le mouvement de l'électron étant connu, on peut calculer la puissance moyennée dans le temps qu'il reçoit de l'onde $W_e = \langle -eEv \rangle$.

$$\begin{aligned} W_e &= \langle -eE(x_0 + x_1)(v_0 + v_1) \rangle \approx \langle -eE(x_0)v_0 \rangle + \langle -eE(x_0)v_1 \rangle + \langle -e\partial_x(E_x)_{x=x_0} x_1 v_0 \rangle \\ &= -\frac{e}{2} \Re \left[E^* v_1 + x_1 v_0 \partial_x (E_x^*)_{x=x_0} \right] \end{aligned}$$

On remarque que la moyenne du premier terme est nulle car c'est le produit d'une fonction sinusoïdale simple par une constante (v_0), et dans la deuxième ligne on a exprimé la moyenne en fonction des quantités complexes. On a au final :

$$W_e = -\frac{e^2}{2m} \Re \left[-\frac{1}{D} + \frac{ikv_0}{D^2} \right] |E|^2 \quad (1)$$

Si on explicite la partie réelle on obtient :

$$\begin{aligned} W_e &= -\frac{e^2}{2m} \left[-\frac{\delta}{\delta^2 + (kv_0 - \omega)^2} + \frac{2\delta kv_0 (kv_0 - \omega)}{(\delta^2 + (kv_0 - \omega)^2)^2} \right] |E|^2 \quad (1) \\ &\approx \frac{e^2 \delta k^2 |E|^2}{2m (kv_0 - \omega)^4} \left[\frac{\omega^2}{k^2} - v_0^2 \right] \quad (2) \end{aligned}$$

La deuxième ligne est obtenue à partir de l'hypothèse que δ est petit, et δ^2 négligeable devant $(kv_0 - \omega)^2$ partout au dénominateur. Le signe de W_e est donc celui de $\left[\frac{\omega^2}{k^2} - v_0^2 \right]$. On constate que si la vitesse de l'électron est plus

petite que la vitesse de phase de l'onde, $W_e > 0$ et donc l'électron reçoit de l'énergie de l'onde. A l'inverse, si sa vitesse est plus grande, c'est lui qui cède de l'énergie à l'onde. Cette contribution est surtout importante pour les particules qui ont une vitesse proche de la vitesse de phase de l'onde, à cause du dénominateur. La question qui se pose immédiatement est celle du bilan de ces échanges sur l'ensemble du plasma.

d) *Echanges d'énergie entre l'onde et l'ensemble des électrons*

Savoir si l'onde gagne de l'énergie ou en perd revient à savoir si globalement les électrons plus lents que l'onde sont plus ou moins nombreux que les électrons plus rapides que l'onde. Si on considère une fonction de distribution centrée en 0 et décroissante de part et d'autre, comme une maxwellienne, on constate qualitativement qu'il y a plus d'électrons lents que de rapides (figure 2). L'onde est donc amortie et son énergie est transférée aux électrons. On peut calculer la puissance moyenne W échangée entre l'onde et l'ensemble du plasma en intégrant W_e sur la fonction de distribution initiale f_0 . Pour faire cela on doit prendre la forme de W_e avant approximation (équation (1)), et on trouve

$$W \equiv \int dv W_e(v) f_0(v) = -\frac{e^2 |E|^2}{2mk} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left(-\frac{\delta/k}{(\delta/k)^2 + (v - \omega/k)^2} + \frac{2(\delta/k)v(v - \omega/k)}{((\delta/k)^2 + (v - \omega/k)^2)^2} \right) f_0(v)$$

$$= -\frac{e^2 |E|^2}{2mk} \left\{ \left[-\frac{v\delta/k}{(\delta/k)^2 + (v - \omega/k)^2} f_0(v) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta/k}{(\delta/k)^2 + (v - \omega/k)^2} v d_v (f_0(v)) \right\}$$

où on a fait une intégration par partie. Le premier terme est nul car $f_0 \rightarrow 0$ pour $v \rightarrow \pm\infty$. Pour évaluer le deuxième terme on peut maintenant faire tendre δ vers zéro et remarquer que

$$\lim_{\delta/k \rightarrow 0} \frac{\delta/k}{(\delta/k)^2 + (v - \omega/k)^2} = \pi \delta_D(v - \omega/k)$$

où δ_D est la fonction delta de Dirac. Grâce à cela on obtient le résultat final pour dW/dt

$$W = -\frac{\pi e^2 \omega}{2m k^2} |E|^2 d_v (f_0(v)) \Big|_{\omega/k}$$

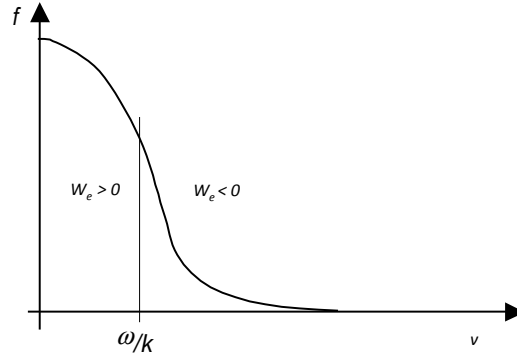


Figure 2. *Fonction de distribution stable*

Cette expression confirme le rôle de la pente de la fonction de distribution au point où la vitesse est égale à la vitesse de phase de l'onde. Si cette pente est négative, les particules en moyenne gagnent de l'énergie et par conservation, l'onde est amortie. Le bilan d'énergie nous permet de calculer le taux d'amortissement. La densité d'énergie moyenne associée à l'onde plasma électronique est donnée²² par $U = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \epsilon_0 |E|^2 / 2$. L'amortissement de l'onde correspond à une décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde, on note donc $|E| = |E_0| \exp(-\gamma t)$. L'énergie par unité de temps perdue par l'onde est égale à l'énergie gagnée par les particules, on a donc

²² L'énergie de l'onde est la somme de l'énergie associée au champ électrique $\epsilon_0 \langle E^2 \rangle / 2$ et de l'énergie associée à l'oscillation des particules que on peut montrer être aussi égale à $\epsilon_0 \langle E^2 \rangle / 2$. Il en résulte que l'énergie totale de l'onde est bien donnée par $\epsilon_0 \langle E^2 \rangle$.

$$\frac{dU}{dt} = -2\gamma_L \frac{|E^2|}{2} = -\frac{\pi e^2 \omega}{2m k^2} |E|^2 d_v(f_0)|_{\omega/k} = W$$

$$\gamma_L = \frac{\pi e^2 \omega}{2m k^2} d_v(f_0)|_{\omega/k} = \frac{\pi}{2} \omega \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} d_v(f_0/n_0)|_{\omega/k}$$

C'est ce qu'on appelle l'**effet Landau**. Il est important de remarquer que l'onde est amortie sans dissipation au sens classique²³.

A l'inverse dans l'hypothèse où la fonction de distribution a une région de pente positive, l'échange d'énergie peut se faire en sens inverse et une onde avec vitesse de phase dans la zone de pente positive peut être amplifiée (voir figure 3), là ou en moyenne les particules perdent de l'énergie.

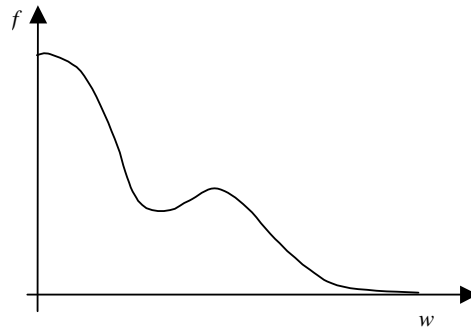


Figure 3. Fonction de distribution potentiellement instable

L'excitation et évolution de cette instabilité peut être montré par des simulations numériques, où on introduit dans le plasma décrit par cette fonction de distribution une petite perturbation ondulatoire avec une vitesse de phase égale à la vitesse des particules dans la zone où la pente est positive.

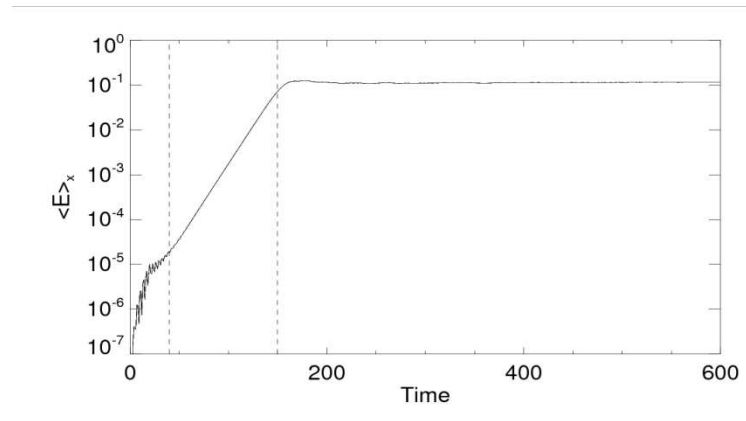


Figure 4. Croissance de l'amplitude de l'onde avec le temps jusqu'à la saturation

Ceci est illustré par les figures 4, 5 et 6 : sur la figure 4 on voit l'amplitude du champ électrique de l'onde qui croît avec le temps, pendant cette croissance les particules un peu plus rapides ont cédé leur énergie à l'onde, le nombre de particules avec une vitesse un peu plus faible que la vitesse de l'onde augmente et la fonction de

²³ C'est donc un phénomène fondamentalement différent de l'amortissement habituel, puisqu'il s'agit d'un amortissement réversible du point de vue des équations microscopiques (l'équation de Vlasov conserve l'entropie, c'est l'équivalent d'équations du mouvement sans friction et donc réversibles).

distribution s'aplatit avec le temps autour des vitesses proches de la vitesse de phase (figure 5). Quand la pente de la fonction de distribution devient nulle, l'onde cesse de croître et l'amplitude du champ reste constante, comme on le voit sur la figure 4. On parle alors de saturation de l'onde.

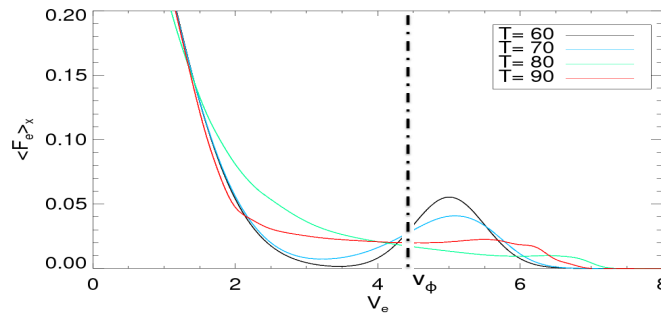


Figure 5. Evolution de la fonction de distribution avec le temps, au temps initial la vitesse de phase de l'onde, v_ϕ est dans la zone à pente positive, mais avec le temps la fonction évolue et s'aplatit, jusqu'à ce que le système devienne stable.

Dans la figure 6 on voit plus en détail ce qui se passe pour les électrons. Elle montre la vitesse des électrons en fonction de l'espace à des temps différents. Chaque point de la figure correspond à la position et à la vitesse d'un ensemble d'électrons, dans ce qu'on appelle l'espace des phases. On reconnaît les particules dans la bosse de la fonction de distribution par la ligne bleue autour de 5 (en unité arbitraires) : on voit qu'avec le temps les particules avec une vitesse proche de la vitesse de phase vont interagir avec l'onde et modifier la fonction de distribution.

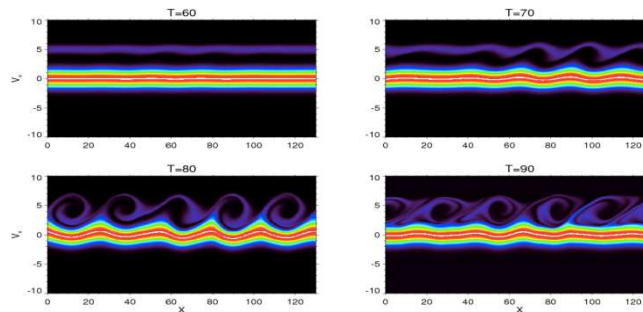


Figure 6. Evolution de l'espace des phases des électrons avec le temps.

L'une des conclusions de cette étude des échanges d'énergie entre onde et particules est qu'il ne faut pas rechercher de modes propres ayant une fréquence purement réelle : sauf cas très particulier où la dérivée de la fonction de distribution serait nulle, il y a toujours des échanges d'énergie entre onde et électrons et donc toujours une partie imaginaire à la fréquence, qui décrit l'amortissement ou la croissance de l'onde. Dans certaines conditions, cet échange peut néanmoins être très petit et négligé (voir ci-dessous).

e) Nombre de particules résonnantes tendant vers zéro : limite fluide

On peut deviner que le rôle des particules résonnantes diminue lorsqu'elles sont moins nombreuses, c'est à dire lorsque la vitesse de phase est grande par rapport à la vitesse quadratique moyenne des particules de la distribution ou au moins de la plus grande partie d'entre elles (figure 7). En faisant un développement limité du résultat précédent pour $\omega/k \gg v$, on devrait donc retrouver le résultat fluide. Vérifions-le. L'intégrale à calculer est :

$$I(\omega/k) = \int dv \frac{\partial_v (f_o) / n_o}{v - \omega/k} = \int dv \frac{f_o / n_o}{(v - \omega/k)^2} = \left\langle \frac{1}{(v - \omega/k)^2} \right\rangle$$

où on a fait une intégration par partie pour avoir la deuxième égalité et utilisé le fait que la fonction de distribution d'équilibre est nulle aux bornes d'intégration.

En faisant le développement limité $kv/\omega \gg 1$ indiqué, il vient :

$$I(\omega/k) = \frac{k^2}{\omega^2} \left\langle \frac{1}{(1 - kv/\omega)^2} \right\rangle = \frac{k^2}{\omega^2} \left\langle 1 + 2kv/\omega + 3k^2v^2/\omega^2 + \dots \right\rangle$$

Grâce au développement limité on n'a plus de pôle au dénominateur et l'intégrale (où la moyenne) est bien définie : dans un milieu à repos (où la vitesse moyenne est nulle), il reste donc finalement, où $\langle v^2 \rangle = V_{the}^2$:

$$I(\omega/k) = \frac{k^2}{\omega^2} \left[1 + 3k^2v_{the}^2/\omega^2 + \dots \right]$$

Ce qui fournit l'équation de dispersion :

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} I(\omega, k) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_{pe}^2 \left[1 + \frac{3k^2v_{the}^2}{\omega^2} + \dots \right] \approx \omega_{pe}^2 + 3k^2v_{the}^2$$

Les deux premiers termes du développement permettent donc de retrouver le résultat fluide, avec une valeur $\gamma = 3$ déterminée ici de façon auto-consistante (alors qu'on devait la poser de façon arbitraire dans le calcul fluide, voir le chapitre 5). Néanmoins, ce résultat reste incomplet : il lui manque l'effet du pôle existant dans l'intégrale.

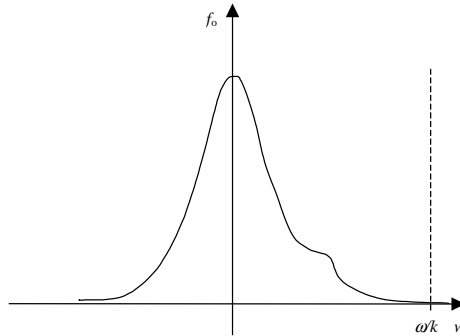


Figure 7. Le plasma répond de façon fluide lorsque la vitesse de phase de l'onde est grande par rapport aux vitesses des particules

Remarque : Dans le calcul fluide on a trouvé ce résultat en faisant l'hypothèse que les compression et décompression de l'onde étaient de type adiabatique 1D. On voit ici que ce résultat est valable dans la limite des vitesses de phase grandes par rapport à la vitesse typique des particules, la vitesse thermique. L'approximation adiabatique est donc valable pour k petit devant ωV_{th} . Comme $\omega \sim \omega_{pe}$, cela revient à écrire $k \ll 1/\lambda_{De}$ (grandes longueurs d'onde devant la longueur de Debye).

3. CALCUL DES MODES PROPRES CINÉTIQUES

Pour fixer les idées, nous ne présentons ici (comme précédemment) que les calculs pour un problème "aux conditions initiales", i.e. un problème dans lequel on cherche l'évolution temporelle du système, la forme spatiale étant imposée en e^{ikx} (avec k réel). Ceci est équivalent en pratique à ce qu'on a fait dans la section 1b, pour ce qui concerne l'évolution spatiale, et cela correspond formellement à prendre la transformée de Fourier du système. Par contre pour l'évolution temporelle les choses sont un peu plus compliquées parce qu'on considère que le système admet une fréquence complexe. Pour cette raison on est amené à prendre la transformée de

Laplace c'est à dire qu'on va toujours faire l'hypothèse d'une évolution de type exponentiel pour les ondes, mais avec une fréquence complexe, et que le problème va dépendre de la condition initiale en temps. On va devoir résoudre une intégrale dans le plan complexe selon un chemin qui est imposé par les définitions de la transformée de Laplace. C'est Landau qui a étudié en détail ce problème et identifié le chemin qu'il faut considérer, qu'on note chemin de Landau (CL). Pour plus de détail sur les transformées de Fourier et de Laplace vous pouvez voir l'appendice. *Le résultat du traitement mathématique détaillé dans l'appendice est le suivant : on peut généraliser les résultats de la méthode classique (section 1b) avec une fréquence complexe, mais il faut bien spécifier le chemin d'intégration dans le plan complexe selon la prescription de Landau, de telle façon que l'intégrale qu'on va devoir résoudre soit bien définie.*

(N.B. On pourrait traiter de façon similaire un problème "aux conditions limites spatiales" (recherche de la variation spatiale avec une variation temporelle imposée en $e^{-i\omega t}$) ou, un peu plus difficilement, des problèmes à conditions mixtes).

a) Calcul des modes cinétiques : amortissement et instabilité cinétiques (pour $\omega \ll \omega_r$)

On reprend donc le résultat de la section 1b, pour une onde électrostatique haute fréquence (avec les ions immobiles), et le mode cinétique du système en question est donnée par la solution de la relation de dispersion

$$D(\omega, k) = \left[1 - \frac{e^2}{k^2 m \epsilon_0} \int_{CL} dv \frac{\partial_v (f_0)}{v - \omega/k} \right] = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} I(\omega/k)$$

avec $I(\omega/k) = \int_{CL} dv \frac{\partial_v (f_0)/n_0}{v - \omega/k}$

Ici on admet que la fréquence est complexe $\omega = \omega_r + i\omega_i$ et l'indice CL indique le chemin de Landau.

En général on est intéressé à des solutions type onde qui se propage et faiblement amortie ou amplifiée, car c'est le type de solution qui va être excité le plus naturellement dans le système et qui va exister pour des temps longs. Dans ce cas $\omega_i \ll \omega_r$ (cas peu amorti ou peu amplifié) et la valeur limite de I est (formule de Plemelj, voir appendice) :

$$I(\omega/k) = P \int dv \frac{\partial_v (f_0)/n_0}{v - \omega/k} + i\pi \partial_v (f_0)/n_0 \Big|_{v=\omega_r/k} \quad (3)$$

où le premier terme est la **partie principale** de l'intégrale et est donc **réel**. Le second est la partie imaginaire du résultat et on voit qu'il est proportionnel à la dérivée de la fonction de distribution d'ordre zéro en $v = \omega_r/k$. Ce second terme, dans l'hypothèse considérée, doit être beaucoup plus petit que le premier (qui détermine approximativement la valeur de ω_r à lui seul). La formule encadrée (équation (3)) permet de résoudre l'intégrale, car elle donne la solution de I selon le chemin d'intégration de Landau, dans la limite $\omega_i \ll \omega_r$.

C'est le second terme, *i.e.* la partie imaginaire de I , qui fait qu'il n'existe plus de solution réelle à l'équation de dispersion et qui fixe le signe de ω_i . On retrouve bien les résultats obtenus précédemment pour l'effet Landau :

- Pour une fonction de distribution toujours décroissante (telle qu'une maxwellienne), cette dérivée est négative et on montre que les effets cinétiques entraînent toujours une **décroissance** de l'onde.

- Pour une fonction de distribution non monotone (existence d'une pente positive), il existe une possibilité pour que la solution ω_r/k de l'équation de dispersion se situe dans une partie croissante de la fonction de distribution ; dans ce cas, le plasma est « cinétiquement instable ».

b) Cas particulier d'une distribution f_0 maxwellienne

Le cas particulier où la fonction de distribution f_0 est maxwellienne reste toujours important. Il est abondamment documenté et dans ce cas, on écrit généralement l'équation de dispersion à l'aide de la fonction de Fried et Conte $Z(\xi)$ définie par l'intégrale dans le demi-plan $\xi_i > 0$:

$$Z(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-x^2}}{x - \xi} \quad \text{pour } \xi_i > 0,$$

et par son *prolongement analytique* dans le demi-plan $\xi_i < 0$ (introduisant $i\pi$ fois la dérivée de la fonction maxwellienne au pôle comme précédemment). Cette fonction est étroitement liée à une autre fonction mathématique connue, la fonction d'erreur (Erf). Fried et Conte ont tabulé la fonction $Z(\xi)$ en 1961²⁴. En l'utilisant, l'équation de dispersion cinétique de l'oscillation de plasma s'écrit (Z' étant la dérivée de Z):

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \xi^2 Z'(\xi) \quad \text{avec } \xi = \frac{\omega/k}{\sqrt{2}v_{the}}$$

c) Résonances cyclotron

Les effets cinétiques que nous venons d'étudier sont dus à un type de résonance qu'on appelle "*résonance Landau*" ou "résonance *Cerenkov*". Ils correspondent à la singularité qui apparaît à la vitesse $v = \omega/k$. Dans un plasma magnétisé, un calcul plus complet montre que cette résonance n'est pas la seule. Il existe une résonance pour toutes les vitesses v_n dont la composante parallèle vérifie :

$$v_{n//} = \frac{\omega - n\omega_c}{k_{//}}$$

La résonance Landau n'est que la résonance d'ordre zéro de cette série. Les autres sont appelées "*résonances cyclotron*". La résonance Landau concerne une interaction entre le champ électrique parallèle et le mouvement parallèle des particules. Toutes les autres concernent des interactions entre le champ électrique perpendiculaire et le mouvement perpendiculaire des particules (rotation) en présence de champ magnétique.

d) L'effet Landau pour les ondes plasma

On est maintenant en mesure de calculer la relation de dispersion complète pour les ondes plasma. On va prendre ici le cas où la fonction d'équilibre est une maxwellienne $f_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{the}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{the}^2}\right)$.

Selon ce qu'on a vu dans les sections précédentes, si on utilise l'équation (3), la relation de dispersion est donnée par

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} I(\omega/k) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} P \int dv \frac{\partial_v(f_0)/n_0}{v - \omega/k} + i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \partial_v(f_0)/n_0 \Big|_{v=\omega/k} = 0$$

Pour alléger les calculs on considère la limite $\omega/k \gg v_{the}$. On verra a posteriori que la condition $\omega \ll \omega_c$ pour les ondes plasma implique cette limite. On considère premièrement la partie principale de l'intégrale, et on fait une intégration par parties.

$$P \int dv \frac{\partial_v(f_0)/n_0}{v - \omega/k} = \frac{f_0}{n_0} \Big|_{-\infty}^{\infty} + P \int dv \frac{f_0/n_0}{(v - \omega/k)^2} = P \int dv \frac{f_0/n_0}{(v - \omega/k)^2}$$

La contribution à l'intégrale par les particules avec vitesse $v \gg v_{the}$ est faible à cause de l'exponentielle donc on peut considérer que dans l'intégrale la limite $\omega/k \gg v_{the}$ implique $\omega/k \gg v$ et faire un développement limité (N.B. le lecteur intéressé pourra faire le même calcul sans développement limité avec la fonction de Fried et Conte).

²⁴ Fried and Conte, The plasma dispersion function, 1961.

$$P \int dv \frac{f_0 / n_0}{(v - \omega/k)^2} \approx -\frac{k^2}{\omega^2} \int dv \frac{f_0}{n_0} \left(1 + 2 \frac{kv}{\omega} + 3 \frac{k^2 v^2}{\omega^2} + \dots \right)$$

Avec cette forme on peut calculer facilement la relation de dispersion en intégrant :

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{the}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k} \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2v_{the}^2 k^2}}}{v_{the}^3} = 0$$

Pour résoudre la relation de dispersion on remplace $\omega = \omega_r + i\omega_i$ et on fait un développement limité pour $\omega_i \ll \omega_r$, en plus comme on est dans la limite $kv_{the}/\omega \ll 1$ on peut considérer que $\omega \sim \omega_r$ quand il apparaît dans des termes qui sont déjà petits. On a donc :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_r + i\omega_i)^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{the}^2}{(\omega_r + i\omega_i)^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\omega_r + i\omega_i)}{k} \frac{e^{-\frac{(\omega_r + i\omega_i)^2}{2v_{the}^2 k^2}}}{v_{the}^3} \\ \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} \left(1 - 2i \frac{\omega_i}{\omega_r} \right) \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{the}^2}{\omega_r^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_r}{k} \frac{e^{-\frac{\omega_r^2}{2v_{the}^2 k^2}}}{v_{the}^3} = 0 \end{aligned}$$

La solution de la partie réelle et de la partie imaginaire de cette équation nous permet de calculer la partie réelle et imaginaire de la fréquence pour un k donné et donc de trouver la relation de dispersion et la valeur de l'amortissement :

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{the}^2}{\omega_r^2} \right) \approx \omega_{pe}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{the}^2}{\omega_{pe}^2} \right) \quad (4)$$

$$\omega_i = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\omega_r^2}{k} \frac{e^{-\frac{\omega_r^2}{2v_{the}^2 k^2}}}{v_{the}^3} \quad (5)$$

On retrouve bien donc la relation de dispersion fluide, et une partie imaginaire négative (due à la pente négative de la maxwellienne) ce qui correspond à un amortissement de l'onde. L'expression du champ électrique des ondes plasma ou ondes de Langmuir est donc finalement donnée par $E_1 = E_{1L} e^{-\gamma_L} e^{ikx - i\omega t}$ avec $\gamma_L = |\omega_i|$. On peut facilement vérifier que ce résultat est identique au calcul de l'amortissement Landau par une onde plasma électronique développé dans la section 2d. On vérifie aussi a posteriori que notre calcul est cohérent si $kv_{the}/\omega \ll 1$, en effet si cette inégalité est vérifiée on aura aussi $\omega_i \ll \omega_r$ (car l'exponentielle est dominante et très petite pour $kv_{the}/\omega \ll 1$).

e) L'effet Landau, cas général.

On peut résumer nos résultats pour le cas général en disant que, une fois qu'on a trouvé une équation de dispersion $D(\omega, k) = 0$, dans la limite $\omega_i \ll \omega_r$ on peut toujours écrire

$$D(\omega, k) \approx D(\omega_r, k) + i\omega_i \frac{\partial D_r(\omega_r, k)}{\partial \omega_r}$$

où le premier terme a une partie réelle et une partie imaginaire, c'est-à-dire $D(\omega_r, k) = D_r(\omega_r, k) + iD_i(\omega_r, k)$.

La solution de l'équation de dispersion est donc donnée par

$$D_r(\omega_r, k) = 0$$

où on a négligé des termes d'ordre $(\omega_i/\omega_r)^2$, et par

$$\omega_i = -\frac{D_i(\omega_r, k)}{\partial D_r(\omega_r, k)/\partial \omega_r}$$

On peut appliquer cette formule au cas des ondes acoustiques-ioniques. Connaissant la solution fluide (voir chapitre 5) on sait que ces ondes sont caractérisées par $v_{thi} < \frac{\omega}{k} < v_{the}$. Dans cette limite, on obtient la relation de dispersion (les calculs sont détaillés dans les autocorrectifs) :

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 v_{thi}^2}{\omega^2} \right) + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + i\pi \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \partial_v (f_{0i}) / n_{0i} \Big|_{v=\omega/k} + i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \partial_v (f_{0e}) / n_{0e} \Big|_{v=\omega/k} = 0$$

Pour arriver à cette formule on a utilisé deux fonctions d'équilibre pour les ions et les électrons maxwelliennes :

$$f_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_{the}^2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{the}^2}\right) \text{ et } f_{0i}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_{thi}^2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{thi}^2}\right).$$

Cette relation nous permet d'identifier la fréquence propre et l'amortissement Landau des ondes acoustiques ioniques.

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} \left(1 + \frac{3k^2 v_{thi}^2}{\omega_r^2} \right) + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} = 0$$

$$\omega_r^2 = \frac{k^2 c_{s0}^2}{(k^2 \lambda_{De}^2 + 1)} + k^2 c_{s0}^2 \left(\frac{3T_i}{T_e} \right) \text{ où } c_{s0}^2 \equiv \frac{ZT_e}{m_i} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\omega_i}{\omega_r} &= \frac{k^2 \lambda_{De}^2}{k^2 \lambda_{De}^2 + 1} \left(i\pi \frac{\omega_{pi}^2}{2k^2} \partial_v (f_{0i}) / n_{0i} \Big|_{v=\omega/k} + i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{2k^2} \partial_v (f_{0e}) / n_{0e} \Big|_{v=\omega/k} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{\pi/8}}{(k^2 \lambda_{De}^2 + 1)^{3/2}} \left[\left(\frac{ZT_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{ZT_e/T_i}{2(1+k^2 \lambda_{De}^2)}\right) + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right] \quad (7) \end{aligned}$$

On voit que la condition $\omega_i \ll \omega_r$ est satisfaite seulement si $T_i \ll ZT_e$, ce qui nous donne une condition d'existence des ondes acoustiques ioniques. On a négligé le terme $3T_i/T_e$ pour la partie réelle de la fréquence dans les calculs d'amortissement de l'onde. On remarque aussi qu'on a deux termes qui vont contribuer à l'amortissement des ondes acoustiques-ioniques, le premier est dû à l'amortissement par les ions, et le deuxième à l'amortissement par les électrons, à chaque fois ce qui rentre en compte c'est la dérivée de la fonction de distribution des particules, évaluée à la vitesse de phase de l'onde.

Pour résumer, à partir du calcul cinétique on justifie d'une part les équations de fermeture utilisées pour le calcul fluide (ou mieux on voit dans quelle limite ces hypothèses sont valables), et d'autre part on montre que ces ondes sont amorties par l'interaction avec les particules résonnantes, et on peut calculer le temps typique d'amortissement, $1/\omega_i$.

Comme anticipé, nos calculs, et le concept même d'onde dans un plasma ne sont cohérents que si les ondes sont faiblement amorties i.e. si $\omega_i \ll \omega_r$ cette contrainte nous permet donc de définir les conditions d'existence des ondes dans un plasma.

APPENDICE A. TRANSFORMEE DE LAPLACE pour le calcul des modes cinétiques

Repartant du système d'équations de Vlasov-Maxwell, on obtient cette fois le système suivant où $E_I = E_I(t, k)e^{ikx}$ et on indique par $E_I(\omega, k)$ la transformée de Laplace de $E_I(t, k)$; on utilise les mêmes notations pour f_1 :

$$\begin{cases} (v - \omega/k) f_1(\omega, k) = \frac{e \partial_v(f_0)}{ikm} E_1(\omega, k) + \frac{f_1^0(v)}{2\pi} \\ E_1(\omega, k) = -\frac{e}{ik\epsilon_0} n_1(\omega, k) \end{cases} \quad \text{avec} \quad n_1 = \int dv f_1(v)$$

où $f_1^0(v)$ est la perturbation initiale de la fonction de distribution. Le résultat est très similaire à ce qu'on trouvé précédemment, mais la résolution demande un peu d'attention.

$$\begin{cases} f_1(\omega, k) = \frac{e \partial_v(f_0)}{ikm(v - \omega/k)} E_1(\omega, k) + \frac{f_1^0(v)}{2\pi(v - \omega/k)} \\ E_1(\omega, k) = \frac{e^2 E_1(\omega, k)}{k^2 m \epsilon_0} \int_{CL} \frac{\partial_v(f_0)}{(v - \omega/k)} dv - \frac{e}{ik\epsilon_0} \int_{CL} \frac{f_1^0(v)}{2\pi(v - \omega/k)} dv \end{cases}$$

Où l'intégrale est calculée suivant le contour de Landau (CL), qui sera précisé dans la suite.

La solution de ce système donne donc

$$\left[1 - \frac{e^2}{k^2 m \epsilon_0} \int_{CL} dv \frac{\partial_v(f_0)}{v - \omega/k} \right] E_1 = -\frac{e}{ik\epsilon_0} \int_{CL} dv \frac{f_1^0(v)}{2\pi(v - \omega/k)}$$

Toute solution se calcule alors pour $t > 0$ comme une transformée de Laplace inverse qui a la forme de l'intégrale suivante (écrite ici pour la perturbation de électrique) :

Où $D(\omega, k)$ est donné par :

$$D(\omega, k) = \left[1 - \frac{e^2}{k^2 m \epsilon_0} \int_{CL} dv \frac{\partial_v(f_0)}{v - \omega/k} \right] = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} I(\omega/k)$$

$$\text{avec } I(\omega/k) = \int_{CL} dv \frac{\partial_v(f_0)/n_0}{v - \omega/k}$$

de telle façon qu'on retrouve la même forme que au chapitre 1b, mais avec maintenant une choix de chemin pour l'intégrale. La transformation de Laplace inverse donne donc la perturbation $E_1(t)$ comme une intégrale sur ω' d'un intégrant qui dépend de la perturbation initiale $f_0^1(v)$ et qui possède des **pôles** (complexes) en raison du dénominateur D . On peut prouver que dans la limite où le temps t est grand cette expression de E_1 prends une forme beaucoup plus simple. En effet pour des temps longs on aura tout simplement

$$\boxed{E_1(t, k) = \sum_j E_{1,j} e^{-i\omega_j t}$$

$$\text{où } \omega_j \text{ satisfait } D(\omega_j, k) = 0$$

On voit donc que la solution naïve de la section 1b est correcte, si on défini un chemin pour la résolution de l'intégrale $I(\omega/k)$, et si on admet des fréquences complexes.

L'équation de dispersion des modes cinétiques est donc en fait de la forme $D = 0$, avec :

$$D_h(\omega_j, k) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} I_h(\omega_j / k)$$

où I_h est une fonction holomorphe qui est *égale à I* pour $\omega > 0$ mais qui est égale à son *prolongement analytique* pour le demi-plan complexe inférieur (solutions amorties dans un plasma stable) :

$$I_h(\omega/k) = \int dv \frac{\partial_v(f_o)/n_o}{v - \omega/k} + 2i\pi \partial_v(f_o)/n_o \Big|_{v=\omega/k}$$

pour $\omega < 0$

Ce *prolongement analytique* peut s'obtenir en déformant le contour d'intégration de l'intégrale sur les vitesses, i.e. en remplaçant l'axe réel par un contour complexe passant en dessous de ω/k : le contour de Landau.

Dans le cas $\omega \ll \omega_r$ (cas peu amorti ou peu amplifié) le chemin d'intégration est fait sur un demi-cercle, dans ce cas on a que la valeur limite de I est (formule de Plemelj) :

$$I_h(\omega/k) = P \int dv \frac{\partial_v(f_o)/n_o}{v - \omega/k} + i\pi \partial_v(f_o)/n_o \Big|_{v=\omega_r/k}$$

C'est cette formule qu'on utilise dans le texte pour faire les calculs.

APPENDICE B : METHODE DE LANDAU-LAPLACE DE RECHERCHE DES MODES PROPRES.

Revenons maintenant sur la méthode de résolution utilisée dans le cas fluide et dans la section 1 pour l'analyser plus précisément et étudier comment on peut la généraliser à un système comportant une infinité de modes propres. On verra que la bonne généralisation consiste à utiliser la transformée de Laplace. Pour illustrer cette discussion très générale nous utiliserons un exemple très simple d'oscillateurs couplés pour lequel aucune des méthodes envisagées ne pose de difficulté technique.

Le système est constitué de deux masses identiques $m_1 = m_2 = m$ suspendues par deux ressorts de mêmes raideurs $k_1 = k_2 = k$ à une barre sans masse contrainte à rester horizontale, cet ensemble étant lui-même suspendu à un point fixe par un ressort de raideur K . Ce petit modèle mène à un système différentiel simple, mais il a aussi l'intérêt d'illustrer un problème physique qui nous intéresse : le couplage de plusieurs oscillateurs élémentaires par un oscillateur global (similaire au couplage des vitesses de particules individuelles par un champ collectif). Considérer que les deux oscillateurs élémentaires sont identiques mène à des calculs plus simples. La mise en équation du problème est présentée sur la figure 8.

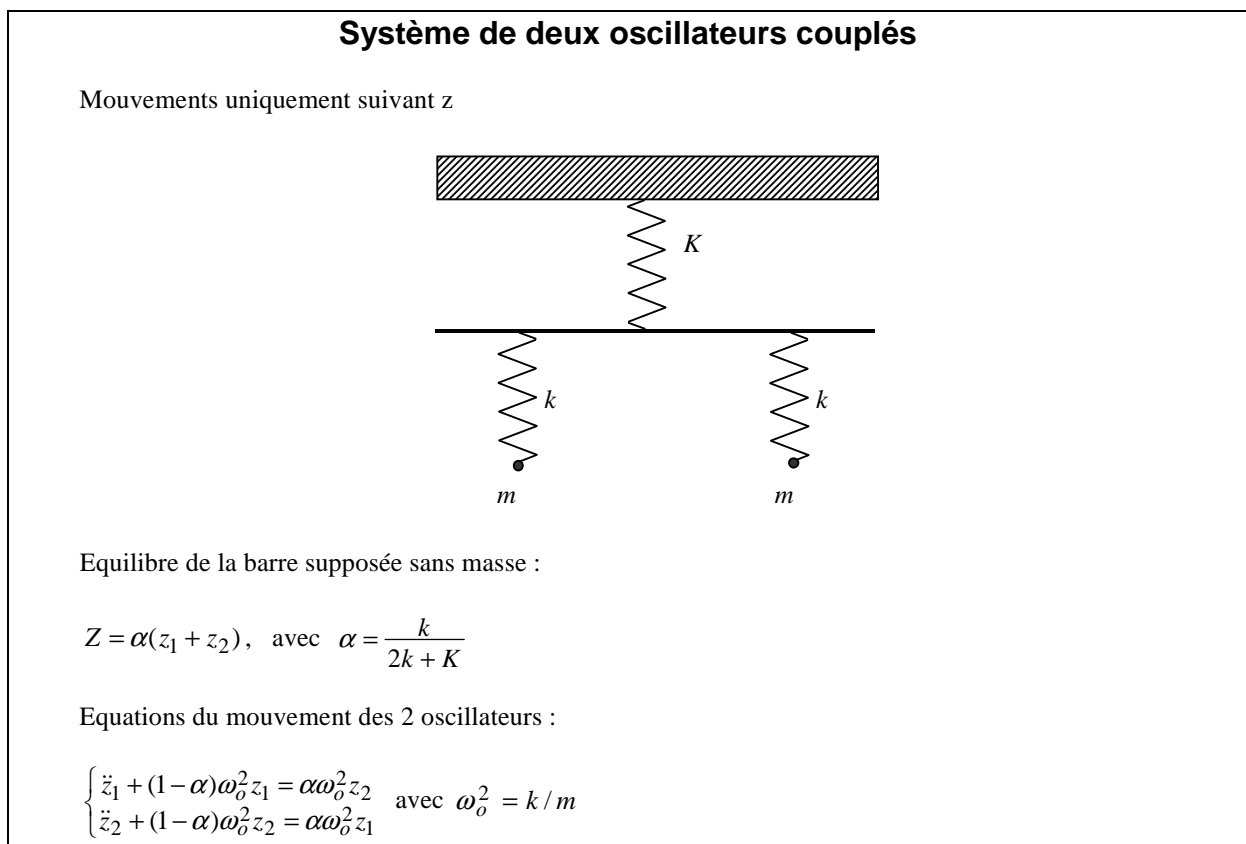


Figure 8

a) Analyse de la méthode classique

Revenons au cas général d'un système à N degrés de liberté. Une fois les équations physiques écrites, on obtient un système d'équations différentielles faisant intervenir les fonctions z_1, z_2, \dots, z_N et leurs dérivées successives par rapport au temps. On cherche alors des solutions sous la forme $z(t) = z_0 \exp^{-i\omega t}$. En reportant dans le système d'équations différentielles, on obtient un système d'équations linéaire et homogène qui fait intervenir ω et les paramètres du système, ainsi que les fonctions z . On peut mettre ce système sous la forme $\overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{z}}} = 0$. Il n'a donc une solution non triviale que si le déterminant de la matrice $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ est nul. La résolution de l'équation $\det \overline{\overline{\mathbf{M}}} = 0$ permet d'obtenir les modes propres sous la forme de N valeurs de ω auxquelles sont associées des vecteurs propres $\overline{\overline{\mathbf{z}}}_n$, pour un système qui ne fait intervenir que des dérivées premières ($2N$ s'il fait intervenir les dérivées secondes, etc...)

La solution du système différentiel de départ peut donc s'écrire finalement :

$$z(t) = \sum_n \alpha_n z_n e^{-i\omega_n t}$$

Les constantes α_n traduisent le fait que la solution générale est une combinaison linéaire des modes propres du système. Elles sont déterminées à partir des conditions initiales données pour le problème particulier qu'on étudie. L'illustration dans le cas des oscillateurs couplés est donnée sur la figure 9.

Résolution par la méthode classique

$$z(t) = z_0 \exp(-i\omega t)$$

$$\dot{z} = -i\omega z$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 z$$

Système d'équations :
$$\begin{bmatrix} \omega^2 - (1-\alpha)\omega_0^2 & \alpha\omega_0^2 \\ \alpha\omega_0^2 & \omega^2 - (1-\alpha)\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0$$

Modes propres :
$$\omega = \pm\omega_0 \text{ et } z_1 + z_2 = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{1-2\alpha} \omega_0 \text{ et } z_1 - z_2 = 0$$

Solution générale :
$$\begin{aligned} z_1(t) &= ae^{-i\omega_0 t} + be^{+i\omega_0 t} + ce^{-i\omega_0\sqrt{1-2\alpha}t} + de^{+i\omega_0\sqrt{1-2\alpha}t} \\ z_2(t) &= -ae^{-i\omega_0 t} - be^{+i\omega_0 t} + ce^{-i\omega_0\sqrt{1-2\alpha}t} + de^{+i\omega_0\sqrt{1-2\alpha}t} \end{aligned}$$

Solution pour : $z_1(0) = z_2(0) = z_0$ et $\dot{z}_1(0) = \dot{z}_2(0) = 0$:

$$z_1(t) = z_2(t) = \frac{z_0}{2} \left(e^{-i\omega_0\sqrt{1-2\alpha}t} + e^{+i\omega_0\sqrt{1-2\alpha}t} \right)$$

Figure 9

Résolution par la transformation de Fourier

Systeme d'equations :

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - (1-\alpha)\omega_0^2 & \alpha\omega_0^2 \\ \alpha\omega_0^2 & \omega^2 - (1-\alpha)\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = 0$$

Résolution :

$$\tilde{z}_n(\omega) = z_n \delta(\omega - \omega_n)$$

(avec les mêmes fréquences ω_n : $\pm\omega_0$ et $\pm\sqrt{1-2\alpha}\omega_0$)

Transformée de Fourier inverse :

$$z_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{z}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega z_n \delta(\omega - \omega_n) e^{-i\omega t} = z_n e^{-i\omega_n t}$$

Solution générale :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= ae^{-i\omega_0 t} + be^{+i\omega_0 t} + ce^{-i\omega_0 \sqrt{1-2\alpha} t} + de^{+i\omega_0 \sqrt{1-2\alpha} t} \\ z_2(t) &= -ae^{-i\omega_0 t} - be^{+i\omega_0 t} + ce^{-i\omega_0 \sqrt{1-2\alpha} t} + de^{+i\omega_0 \sqrt{1-2\alpha} t} \end{aligned}$$

Solution pour $z_1(0) = z_2(0) = z_0$ et $\dot{z}_1(0) = \dot{z}_2(0) = 0$:

$$z_1(t) = z_2(t) = \frac{z_0}{2} \left(e^{-i\omega_0 \sqrt{1-2\alpha} t} + e^{+i\omega_0 \sqrt{1-2\alpha} t} \right)$$

Figure 10

b) Résolution par transformée de Fourier

On peut se demander si la méthode qui vient d'être peut être établie en utilisant la transformée de Fourier.

Rappelons tout d'abord la définition de la transformée de Fourier : $\tilde{z}(\omega) = TF(z(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{i\omega t} dt$.

La transformée inverse se calcule par : $z_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{z}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$

Clairement l'application au système différentiel aboutit au même système que précédemment. Sa résolution consiste à trouver les fonctions $\tilde{z}_n(\omega)$ qui vérifient le système. On voit qu'on peut les mettre sous la forme $\tilde{z}_n(\omega) = z_0 \delta(\omega - \omega_n)$.

Pour trouver les modes propres en fonction du temps, il faut inverser la transformée :

$$z_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{z}_0 \delta(\omega - \omega_n) e^{-i\omega t} d\omega = \tilde{z}_0 e^{-i\omega_n t}$$

Le calcul fait dans la méthode classique était donc bien une transformée de Fourier, mais, si on le fait rigoureusement, il fait intervenir les distributions. De plus dans l'exemple montré ici il y a un nombre fini de modes et donc une somme discrète. Dans le cas d'un nombre de modes infini, le problème devient mathématiquement difficile. Nous allons voir par contre que la transformée de Laplace aboutit au même résultat dans les cas simples mais est beaucoup plus facile à généraliser.

c) *Résolution par la transformée de Laplace*

La définition de la transformée de Laplace ressemble à celle de Fourier :

$$\tilde{z}(\omega) = TL(z(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} z(t)e^{i\omega t} dt$$

L'expression de la transformation de Laplace inverse est :

$$z(t) = \int_C d\omega \tilde{z}(\omega)e^{-i\omega t}$$

où le contour C a n'importe quelle forme pourvu qu'il passe au dessus de tous les pôles de $\tilde{z}(\omega)$.

On voit que la transformée de Laplace ressemble à celle de Fourier à deux nuances près : l'intégrale n'est calculée que pour les temps positifs et la fréquence peut être complexe, mais sa partie imaginaire doit être supérieure à tous les pôles de $\tilde{z}(\omega)$.

La conséquence de cette définition est que les conditions initiales interviennent dans le calcul des dérivées. En intégrant par parties la transformée de la dérivée, on trouve : $\tilde{\dot{z}}(\omega) = -i\omega\tilde{z}(\omega) - \frac{z(0)}{2\pi}$ et $\tilde{\ddot{z}}(\omega) = -\omega^2\tilde{z}(\omega) - \frac{\dot{z}(0)}{2\pi} + i\omega\frac{z(0)}{2\pi}$.

En appliquant cette transformée au système de départ, on constate donc qu'on obtient cette fois un système avec second membre : $\overline{\mathbf{M}} \cdot \overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{A}}$, le vecteur du second membre contenant les conditions initiales.

Ce système se résout en $\overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{M}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{A}}$ (voir la résolution pour l'exemple des oscillateurs sur la figure 8). On constate qu'on retrouve les pulsations propres trouvées par les méthodes précédentes sous forme de pôles.

Il ne reste plus qu'à calculer la transformée inverse pour obtenir z en fonction du temps.

On voit que, sous cette forme, le résultat se présente comme une superposition de solutions monochromatiques à fréquences complexes, mais que celles-ci sont en nombre infini (intégrale continue), les différentes fréquences étant prises le long d'un contour C dont le choix comporte un certain arbitraire. Pour un choix quelconque du contour, la méthode ne mène donc pas à une expression simple de la solution générale ; mais il existe un choix de contour particulier qui permet effectivement d'exprimer l'intégrale de façon simple ; il suffit, pour le comprendre, d'avoir quelques connaissances de base sur l'intégration des fonctions complexes, en particulier sur la méthode des résidus. Ce choix de contour est celui présenté sur la figure 12 dans le cas particulier qui illustre notre propos.

Résolution par la transformation de Laplace

Système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - (1-\alpha)\omega_0^2 & \alpha\omega_0^2 \\ \alpha\omega_0^2 & \omega^2 - (1-\alpha)\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} 2\pi A_1 &= i\omega x_1(0) - \dot{z}_1(0) \\ 2\pi A_2 &= i\omega x_2(0) - \dot{z}_2(0) \end{aligned}$$

Résolution :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= \frac{A_1 - A_2}{2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{A_1 + A_2}{2} \frac{1}{\omega^2 - (1-2\alpha)\omega_0^2} \\ \tilde{z}_2 &= \frac{A_1 - A_2}{2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{A_1 + A_2}{2} \frac{1}{\omega^2 - (1-2\alpha)\omega_0^2} \end{aligned}$$

Transformée de Laplace inverse : $z(t) = \int_C d\omega \tilde{z}(\omega) e^{-i\omega t} = -2i\pi \sum_n \text{res}(\omega_n) e^{-i\omega_n t}$

Calcul des résidus :

$$\text{res}(z_1, \omega_0) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} (\omega - \omega_0) \tilde{z}_1(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{A_1(\omega) - A_2(\omega)}{2} \frac{1}{\omega + \omega_0} = \frac{A_1(\omega_0) - A_2(\omega_0)}{2} \frac{1}{4\omega_0}$$

$$\text{res}(z_1, -\omega_0) = -\frac{A_1(-\omega_0) - A_2(-\omega_0)}{2} \frac{1}{4\omega_0}$$

$$\text{res}(z_1, \omega_0 \sqrt{1-2\alpha}) = \frac{A_1(\omega_0 \sqrt{1-2\alpha}) - A_2(\omega_0 \sqrt{1-2\alpha})}{2} \frac{1}{4\omega_0 \sqrt{1-2\alpha}}$$

$$\text{res}(z_1, -\omega_0 \sqrt{1-2\alpha}) = -\frac{A_1(-\omega_0 \sqrt{1-2\alpha}) - A_2(-\omega_0 \sqrt{1-2\alpha})}{2} \frac{1}{4\omega_0 \sqrt{1-2\alpha}}$$

Solution générale :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= -2i\pi \left[\frac{A_1(\omega_0) - A_2(\omega_0)}{2} \frac{1}{4\omega_0} e^{-i\omega_0 t} - \frac{A_1(-\omega_0) - A_2(-\omega_0)}{2} \frac{1}{4\omega_0} e^{+i\omega_0 t} + \dots \right] \\ z_2(t) &= -2i\pi \left[-\frac{A_1(\omega_0) - A_2(\omega_0)}{2} \frac{1}{4\omega_0} e^{-i\omega_0 t} + \frac{A_1(-\omega_0) - A_2(-\omega_0)}{2} \frac{1}{4\omega_0} e^{+i\omega_0 t} + \dots \right] \end{aligned}$$

Solution pour $z_1(0) = z_2(0) = z_0$ et $\dot{z}_1(0) = \dot{z}_2(0) = 0$ soit $A_1(\omega) = \frac{i\omega z_0}{2\pi}$, $A_2(\omega) = \frac{i\omega z_0}{2\pi}$:

$$z_1(t) = z_2(t) = \frac{z_0}{2} \left(e^{-i\omega_0 \sqrt{1-2\alpha} t} + e^{+i\omega_0 \sqrt{1-2\alpha} t} \right)$$

Figure 11.

Les parties verticales du contour ainsi choisi donnent une contribution nulle à l'intégrale puisqu'elles s'annulent deux à deux (on peut les choisir aussi proches que l'on veut et la fonction est continue) ; la partie horizontale tend également vers zéro (pour $t > 0$) si on fait tendre ω_i vers $-\infty$ puisque l'argument de l'exponentielle complexe varie comme $\omega_i t$; il ne reste donc que la contribution des cercles entourant chaque pôle, c'est à dire :

$$z(t) = -2i\pi \sum_n r_n e^{-i\Omega_n t}$$

où les r_n sont les facteurs multiplicatifs (résidus) qui existent devant les différents pôles $1/(\omega - \omega_n)$ et qui s'expriment de façon simple en fonction de A_{1n} et A_{2n} (les valeurs de A_1 et A_2 pour $\omega = \omega_n$). Ces coefficients r_n montrent comment les différents modes sont excités en fonction des conditions initiales.

Sous cette forme, la solution générale apparaît donc bien, comme dans les deux méthodes précédentes, comme une combinaison linéaire de solutions monochromatiques, les coefficients de cette combinaison étant déterminés par les conditions initiales du problème.

Il est à remarquer que les pôles, dans l'exemple présenté, sont situés sur l'axe réel. Ceci correspond à des modes propres purement oscillatoires, sans amortissement¹. La réalité des pôles est une propriété très générale : elle est respectée pour tous les systèmes *non dissipatifs et stables*, à condition qu'ils aient un *nombre fini de degrés de liberté*. Ceci constitue la raison fondamentale du succès de la méthode classique dans le cas des systèmes fluides, puisque ceux-ci vérifient bien ces critères. A l'opposé, l'échec de cette méthode en théorie cinétique provient du nombre infini de degrés de liberté qui existe alors.

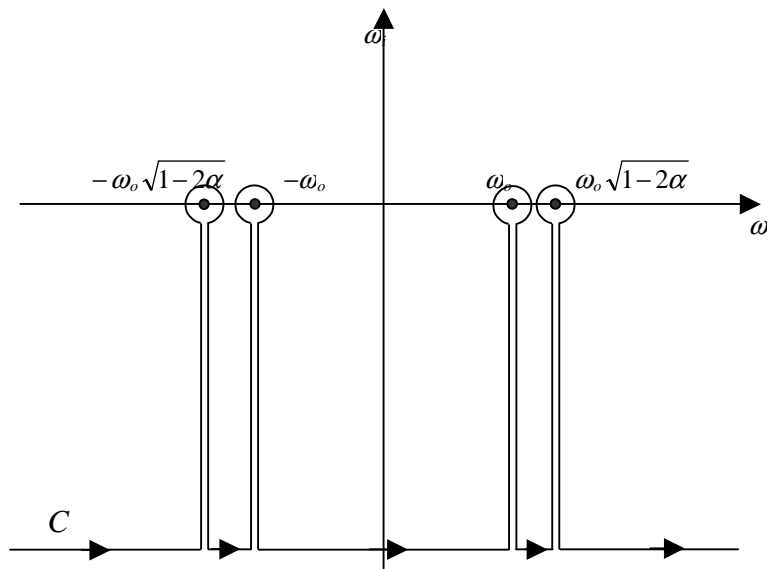


Figure 12. Contour d'intégration pour la transformation de Laplace inverse

CHAPITRE 7 ONDES DE CHOC ET DISCONTINUITES

L'onde de choc est un phénomène bien connu dans les gaz neutres. On sait qu'elle se produit, par exemple, devant un avion qui vole à une vitesse supérieure à la vitesse du son par rapport à l'air. Le phénomène peut se produire également dans les plasmas, de manière très semblable. Grâce au couplage qui existe entre matière et champs électromagnétiques, une grande variété de discontinuités peut exister : plusieurs sortes de chocs, et aussi d'autres types de discontinuités qui ne sont pas des chocs. Toutes ces discontinuités ont en commun de constituer des frontières minces qui séparent deux régions de caractéristiques différentes, tous les paramètres subissant un saut entre l'amont et l'aval de la discontinuité. La première partie de ce chapitre va montrer des exemples de chocs et de discontinuités. La suite du chapitre (optionnelle) analysera les conditions d'existence de telles frontières et établira leurs principales propriétés.

1. Quelques exemples de chocs et de discontinuités

Des chocs sont observés en astrophysique. La figure 1 montre un exemple d'onde de choc observée en astrophysique dans la nébuleuse d'Orion. L'arc lumineux très brillant est un choc cosmique qui mesure environ une demie année-lumière de large. En trois dimensions la structure a la forme d'un bol. Ce type de structure est observé quand on a deux milieux avec des vitesses très différentes qui se rencontrent.



Figure 1. La nébuleuse d'Orion (photo Hubble Space Telescope, NASA).

Beaucoup plus proche de nous il existe une structure semblable. Le vent solaire émis par le Soleil, est freiné brutalement par une onde de choc avant d'atteindre la magnétosphère terrestre. Cette onde de choc n'est pas observable dans le visible comme la précédente, mais elle a été mise en évidence par les mesures faites par les différents satellites qui sont en orbite autour de la Terre. La figure 2 montre un schéma de principe de la magnétosphère sur lequel on voit la forme parabolique du choc. La figure 3 montre un exemple de mesures qui mettent clairement en évidence l'existence d'un choc : on observe un saut dans la valeur de la densité et dans la valeur du champ magnétique. Il faut remarquer sur la figure 2 que la magnétosphère est séparée du vent solaire

par deux frontières successives ; l'onde de choc en amont et la magnétopause en aval. Comme son nom l'indique la magnétopause est la frontière magnétique de la magnétophère ; l'endroit où le champ lié au vent solaire rencontre celui qui est lié à la Terre. Le champ lié à la Terre est approximativement dipolaire quand on est près de la Terre, mais il est fortement modifié près de la magnétopause, écrasé par la pression dynamique du vent solaire. Physiquement quelle est la nature de la magnétopause, c'est une discontinuité qui n'est pas un choc. Le plus souvent une discontinuité tangentielle ou rotationnelle. On constate donc qu'il faut deux discontinuités pour passer des conditions du vent solaire à celles de la magnétophère.

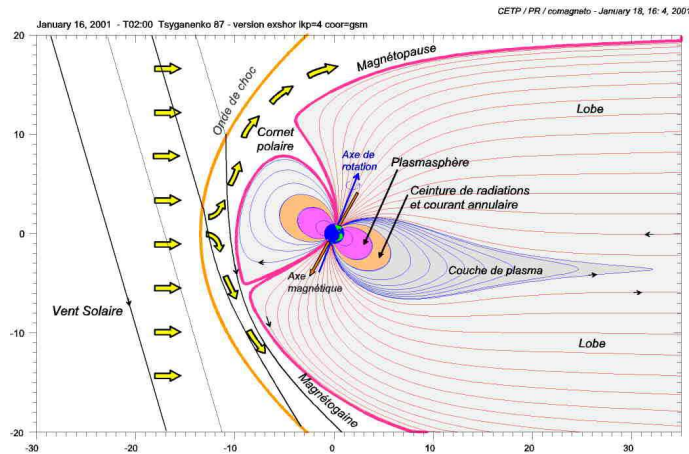


Figure 2. Schéma montrant la magnétophère de la Terre. Il faut imaginer le Soleil très loin vers la gauche, le vent solaire transporte les lignes de champ magnétique liées au Soleil. En partant de la gauche on rencontre d'abord l'onde de choc puis la magnétopause, avant les régions internes de la magnétophère. Le tracé des lignes de champ internes à la magnétophère est fait à partir du modèle semi-empirique de Tsyganenko.

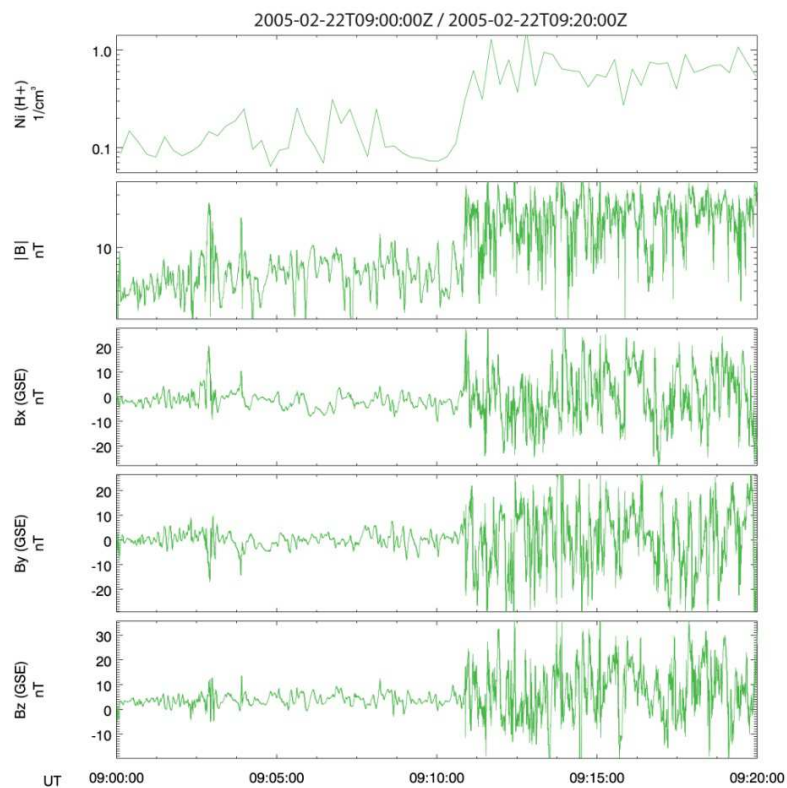


Figure 3. Données du satellite Cluster 3 (ESA). En partant du haut, la densité, le module du champ magnétique et les 3 composantes du champ. On voit clairement un choc un peu après 9 :10. On voit que le choc a pour effet de comprimer le plasma et donc d'augmenter la densité et le champ magnétique.

On peut se demander pourquoi, alors que dans un gaz neutre il n'existe qu'une seule sorte de discontinuité, les chocs. Dans un gaz neutre, l'information sur la présence d'un obstacle se transmet via les ondes acoustiques, dans un plasma on a vu précédemment qu'il y a de nombreux modes de propagation des ondes. Cette complexité se retrouve dans la variété des solutions qui existent en termes de discontinuités.

On sait que dans un fluide neutre derrière le choc il y a une zone de forte turbulence. Dans un plasma on observe la même chose. On peut constater sur la figure 3 la présence de fluctuations magnétiques importantes en aval du choc. Une simulation numérique globale de l'interaction vent solaire magnétosphère met en évidence le même phénomène (Figure 4).

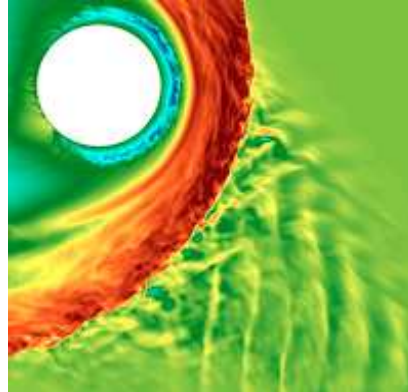


Figure 4. Simulation numérique du choc de la Terre produite avec le code Vlasiator (<http://vlasiator.fmi.fi/>). Il s'agit d'un code hybride qui décrit les ions grâce à l'équation de Vlasov et les électrons comme un fluide. Le cercle blanc est la limite de la simulation et le Soleil est à droite.

La figure 5 illustre le fait qu'on peut aussi produire des chocs dans les plasmas de laboratoire. Ils sont le plus souvent créés par laser ou par un jet de plasma et quelquefois pour reproduire les chocs observés en astrophysique.

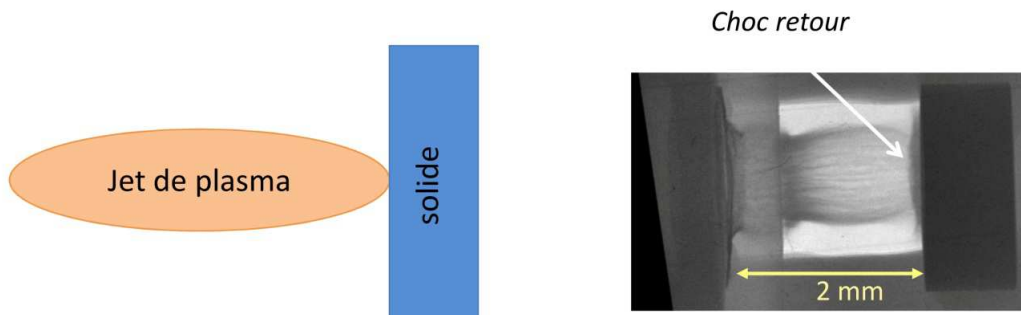


Figure 5. Observation en laboratoire de la formation d'un choc par l'interaction d'un jet de plasma avec une solide : schéma de l'expérience à gauche, image obtenue par radiographie en rayons X à droite (A. Benuzzi Mounaix).

2. Existence des discontinuités*

a) Absence de gradient stationnaire

On considère dans un premier temps, un fluide neutre, adiabatique (on supposera $p/\rho^\gamma = \text{cste}$, avec $\gamma = 5/3$). On suppose que ce fluide se dirige vers les x positifs. Si on place un obstacle dans ce flot, quelle forme stationnaire l'écoulement autour de cet obstacle peut-il prendre? La vitesse v_x du fluide devant s'annuler sur l'obstacle, on cherche en particulier dans quelles conditions ce ralentissement, entre la condition limite à gauche $v_x = v_0$ et la condition limite à droite $v_x = 0$, peut être continu et quand il doit se faire par l'intermédiaire d'une discontinuité.

En réduisant, pour simplifier, ce problème à une seule dimension (x), plusieurs résultats intéressants peuvent être établis de façon simple. On part pour cela du système d'équations fluides :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v_x) = 0 \\ \rho \partial_t v_x + \rho v_x \partial_x (v_x) + \partial_x (p) = 0 \end{cases}$$

En tenant compte entre p et ρ et de la définition de la vitesse du son $c_s = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{p}{\rho}}$, on peut démontrer les relations différentielles suivantes : $\partial \rho = 3\rho \partial c_s / c_s$ et $\partial p = 5p \partial c_s / c_s$.

Le système se met alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 3(\partial_t + v_x \partial_x)(c_s) + c_s \partial_x (v_x) = 0 \\ (\partial_t + v_x \partial_x)(v_x) + 3c_s \partial_x (c_s) = 0 \end{cases}$$

Cherchons d'abord s'il existe des solutions « stationnaires » au système ci-dessus (avec une dérivée partielle par rapport au temps nulle). On admettra que ces solutions peuvent être stationnaires dans un repère quelconque : si le repère où la solution est immobile se déplace à la vitesse v_x par rapport à l'obstacle, on notera la vitesse relative du plasma par rapport à la structure $\delta v_x = v_x - c_s$. Avec cette notation, le système s'écrit :

$$\begin{cases} 3\delta v_x \partial_x (c_s) + c_s \partial_x (\delta v_x) = 0 \\ \delta v_x \partial_x (\delta v_x) + 3c_s \partial_x (c_s) = 0 \end{cases}$$

La résolution en δv_x mène alors simplement à $[\delta v_x^2 - c_s^2] \partial_x (\delta v_x) = 0$. Or, il est facile de voir que cette équation n'a pas d'autre solution *continue* exacte que la solution triviale $\delta v_x = \text{cste}$ et $c_s = \text{cste}$ (uniforme). Ce résultat non linéairement exact, dans lequel la vitesse est uniforme, est évidemment incompatible avec l'hypothèse que les conditions limites sont différentes à droite et à gauche. La conclusion est donc qu'il n'est pas possible de ralentir le flot en amont de l'obstacle par un gradient continu qui soit stationnaire (dans son repère).

b) *Raidissement non linéaire*

Si donc un gradient à une dimension ne peut jamais être stationnaire, cela signifie que tout gradient pris comme condition initiale va, en plus de son mouvement global, • soit s'étaler (et tendre vers la solution uniforme), • soit se raidir (et tendre vers une discontinuité).

On peut comprendre ce phénomène en étudiant un cas particulier dit "onde simple", qui est une extension non linéaire de la notion d'onde propagative. Il suffit pour cela de considérer des variations de v_x et de c_s qui sont reliées entre elles par $v_x + 3c_s = \text{cste}$. En faisant la somme des équations de départ, on vérifie que

$$d_{t+}(v_x + 3c_s) = 0 \text{ où } d_{t+} = \partial_t + (v_x + c_s) \partial_x.$$

Donc si cette condition est vérifiée partout dans la condition initiale, elle continue de l'être au cours du temps. Dans ces conditions, la différence des équations de départ montre que la propagation respecte alors :

$$d_{t-}(v_x) = 0 \text{ et } d_{t-}(c_s) = 0, \text{ avec } d_{t-} = \partial_t + (v_x - c_s) \partial_x.$$

Ce qui signifie que si on se donne une valeur $v_x = v_{xo}$ à un instant $t = t_o$, on retrouve cette valeur à l'instant $t = t_o + \delta t$ au point $x = x_o + (v_x - c_s) \delta t$. On peut donc en déduire simplement l'évolution d'un profil donné choisi comme condition initiale. (Le même raisonnement s'applique bien sûr pour le profil de c_s)²⁵.

²⁵ Le calcul présenté ici, et qui utilise la notion « d'onde simple », est un exemple élémentaire d'une méthode mathématique plus générale, appelée « méthode des caractéristiques ». Celle-ci est utilisée pour résoudre les problèmes de propagation non linéaire (cf. Witham, 1974), c'est à dire pour résoudre les systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles.

La figure 6 illustre l'évolution d'un profil initialement sinusoïdal qui vérifie $v_x + 3c_s = \text{cste}$. On voit que les gradients dans le sens de la propagation se raidissent, alors que les versants opposés s'aplatissent. On peut remarquer aussi que la vitesse relative de propagation par rapport au plasma est partout égale à c_s (en valeur absolue).

On retiendra donc que le résultat linéaire indique grossièrement la vitesse globale de propagation de la structure $v_{xo} - c_{so} = \langle v_x - c_s \rangle$, alors que les effets non-linéaires sont responsables de sa déformation, et en particulier du raidissement de certains gradients.

c) Formation des discontinuités

En poussant plus loin la construction ci-dessus, on arriverait à un résultat absurde : le profil viendrait à « déferler », c'est à dire que, dans certaines régions, on trouverait trois valeurs différentes pour la vitesse v_x au même point x^{26} . On est confronté à ce problème chaque fois que, pour certains points, on peut déduire la valeur de la vitesse à partir de plusieurs valeurs initiales différentes, et que les différentes valeurs trouvées sont contradictoires. *On peut dire, de façon très générale, que c'est ce type de contradiction entre conditions limites (spatiales ou temporelles) qui est toujours la cause de l'existence des discontinuités.* Lorsqu'un obstacle est placé dans un écoulement supersonique par exemple, la propagation idéale, en régime stationnaire, voudrait que la vitesse limite donnée en amont reste constante partout vers l'aval (aucune information ne va assez vite pour « remonter » le flot) ; ceci est évidemment en contradiction avec la présence de l'obstacle qui impose une vitesse nulle à sa surface et c'est pour cela qu'un choc d'étrave doit nécessairement exister devant l'obstacle.

Qu'est ce qui limite le raidissement d'un profil et va s'opposer au déferlement dont on vient de parler ? Ce qui se passe en pratique, c'est que les équations fluides « idéales » qui sont résolues cessent d'être valables lorsque le raidissement mène à des gradients trop grands (en raison par exemple de la viscosité, même si celle-ci est très petite). Ces effets non-idéaux « stationnarisent » le profil : le choc, dans ces conditions apparaît comme un équilibre entre effets non-linéaires (qui raidissent) et effets non-idéaux (qui s'opposent au raidissement). Ce n'est d'ailleurs que grâce aux effets non-idéaux que la propagation peut atteindre des valeurs différentes de c_s (vitesse du son locale) à l'intérieur de la structure et amener à une vitesse supersonique en amont d'un choc et subsonique en aval.

Notons que les discontinuités ainsi formées sont des frontières d'autant plus fines que les effets non idéaux comme la viscosité sont faibles. Ceci justifiera l'hypothèse mono-dimensionnelle utilisée ci-dessous pour les étudier. Par contre, les effets tri-dimensionnels sont en général importants pour étudier le comportement du reste du fluide. Nous n'avons considéré ici un écoulement partout 1-D que pour simplifier l'exposé : ceci peut mener à des différences notables sur le résultat global. Par exemple, l'écoulement autour d'un obstacle sphérique mène à une onde de choc immobile dans le repère de l'obstacle, alors qu'un obstacle plan mène à une onde de choc qui s'éloigne de l'obstacle (il y a accumulation de matière derrière le choc puisque l'écoulement n'a pas d'échappatoire).

Notons enfin que, si les démonstrations ont été présentées ici pour le cas simple d'un fluide neutre, les phénomènes sont tout à fait comparables pour n'importe quel autre fluide, et en particulier en MHD. La suite du chapitre est consacrée aux discontinuités MHD.

3. ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DE SAUT *

a) Signification des équations de saut

Une discontinuité, par définition, est une structure *stationnaire* et *mono-dimensionnelle* (les quantités ne varient essentiellement que suivant la normale \mathbf{n}). On notera que cette définition ne suppose pas que la frontière est fine, si ce n'est, éventuellement, par rapport à l'échelle caractérisant l'écart à la géométrie plane (rayon de courbure par exemple). Pour les calculs, on se placera dans un repère où la structure est immobile.

²⁶ Ceci ne serait pas impossible si on étudiait le cas d'un véritable déferlement, c'est à dire si la grandeur calculée était le niveau de l'eau lors de la propagation de vagues : ce niveau peut effectivement avoir trois valeurs différentes au même point. Par contre, une solution multivaluée est bien évidemment inacceptable pour une quantité comme la vitesse du fluide.

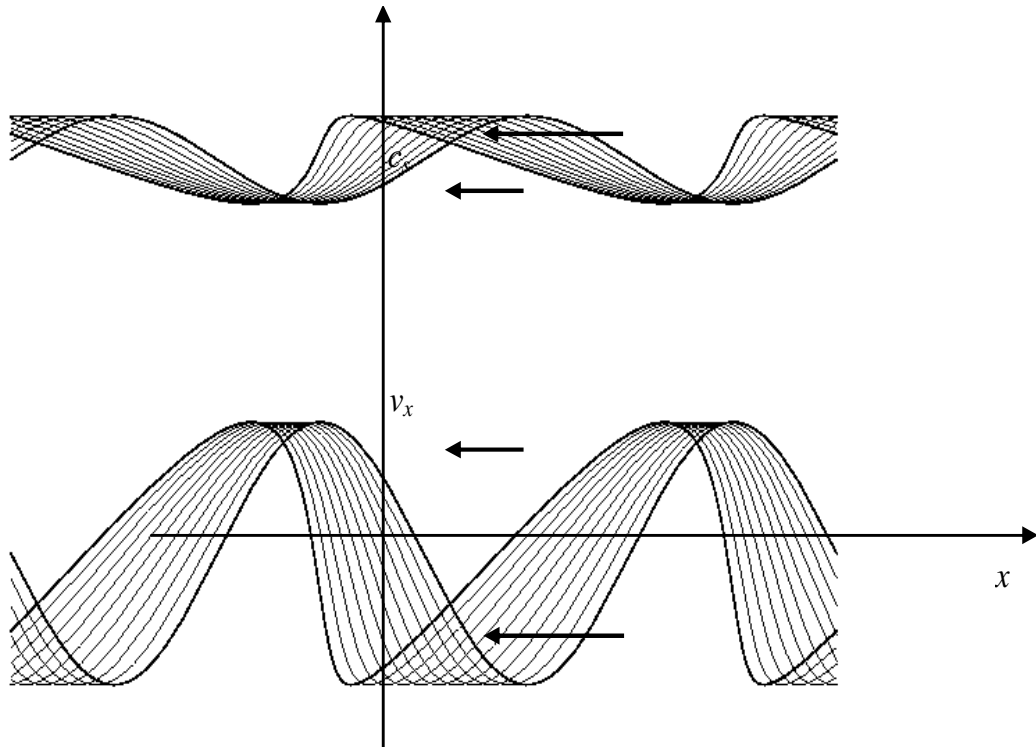


Figure 6. Les courbes représentent le profil de vitesse pour un temps donné (profil sinusoïdal au temps initial, le plus à droite). Les flèches indiquent le déplacement $(v_x - c_s)\delta t$ proportionnel à la vitesse de propagation : $v_x - c_s$. Celle-ci est plus grande en valeur absolue là où v_x est plus négatif. Si la position d'un point à t_0 est x_0 , à $t_0 + \delta t$, la position est $x_0 + (v_x - c_s)\delta t$. C'est ce qui provoque le raidissement du front avant de l'onde au cours de sa propagation (vers la gauche dans le repère de la figure).

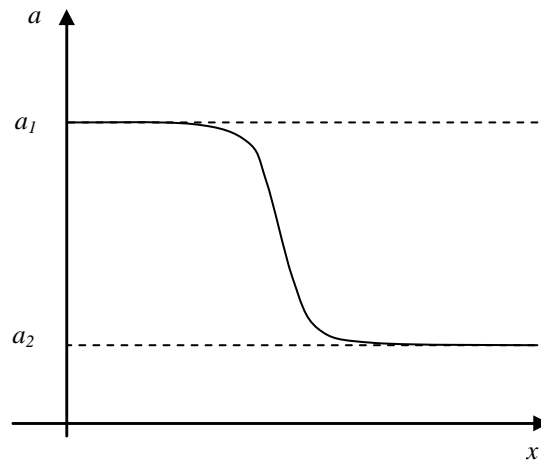


Figure 7. Evolution de la grandeur a au passage de la discontinuité

On supposera de plus que les différents paramètres atteignent des valeurs constantes asymptotiquement de part et d'autre de la discontinuité (figure 7). De cette façon, on peut définir sans ambiguïté, pour toute grandeur a , ses valeurs asymptotiques en amont et en aval de la structure a_1 et a_2 , ainsi que le saut de cette grandeur $\Delta a = a_2 - a_1$. Les sauts des différents paramètres sont reliés entre eux par les « équations de saut ». Celles-ci sont aussi appelées « équations de Rankine-Hugoniot » dans un gaz neutre et « équations de Rankine-Hugoniot généralisées » en MHD. On ne s'intéresse donc pas dans la suite à ce qui se passe à l'intérieur de la discontinuité.

On tire les différentes équations de saut à partir des équations de conservation du système d'équations considéré, qui sera ici le système MHD. Les équations de la MHD idéale proviennent, les unes des équations de Maxwell, les autres d'équations de conservation fluides : masse, impulsion, énergie (cf. chapitre 5). Il faut se souvenir qu'elles n'ont la forme simple qu'on leur connaît que sous réserve de quelques hypothèses simplificatrices, en particulier l'isotropie de la fonction de distribution (pression scalaire), et l'existence d'une équation de fermeture de type adiabatique $\nabla \cdot \overline{\mathbf{Q}} = 0$. Nous supposons ici que *toutes* ces hypothèses sont vérifiées *en dehors* de la couche frontière et que seule la dernière (hypothèse adiabatique) est mise en défaut à l'intérieur de la couche. Les résultats que nous allons démontrer de cette façon ont une validité plus large que celle de ces seules hypothèses, mais les justifications, dans le cas plus général d'un plasma anisotrope -voire non girotrope- dans la couche sont plus délicates.

Les équations de la MHD, même l'équation d'énergie complète avec son flux de chaleur, peuvent toutes se mettre sous une forme conservative (cf. appendice A du chapitre 4) :

$$\partial_t(a) + \nabla \cdot (\mathbf{b}) = 0$$

(Quand a est un scalaire, \mathbf{b} est un vecteur, quand \mathbf{a} est un vecteur, $\overline{\mathbf{b}}$ est un tenseur d'ordre 2, etc...). Puisqu'on cherche des solutions stationnaires et à une dimension des équations, les équations se mettent sous la forme :

$$\nabla \cdot (\mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \partial_x(\mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \partial_x(b_n) = 0$$

où \mathbf{n} est la normale à la discontinuité et b_n la composante de \mathbf{b} selon cette normale. Cette équation s'intègre simplement pour donner :

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \Delta b_n = 0$$

(attention dans tout le chapitre, Δ indique un saut, il n'a aucun rapport avec un laplacien). Chaque équation du système MHD permet ainsi d'établir une relation de conservation à la traversée de la discontinuité.

b) Application aux équations de la MHD

L'intégration faite sur une quantité a ci-dessus peut maintenant être appliquée à toutes les équations de la MHD. L'équation de conservation de la masse permet d'établir que :

$$\rho_2 u_{2n} = \rho_1 u_{1n} = \Phi_m$$

où l'indice n indique la composante normale de la vitesse. De la même manière, $\nabla \cdot (\mathbf{B}) = 0$ implique la conservation bien connue de la composante normale du champ magnétique à la traversée de la discontinuité :

$$B_{2n} = B_{1n} = B_n$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie sont un peu plus lourdes à manipuler ; elles permettent d'établir la conservation des quantités :

$$\rho_2 u_{n2} \mathbf{u}_2 + \left(p_2 + \frac{B_2^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{n} - \frac{B_n \mathbf{B}_2}{\mu_0} = \dots = \Phi_i$$

$$\frac{1}{2} \rho_2 u_{n2}^2 + \frac{5}{2} p_2 u_{n2} - \frac{1}{\mu_0} [B_n (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{u}_2) - B_2^2 u_{n2}] = \dots = \Phi_e$$

(Les membres de droite sont identiques aux membres de gauche, avec des indices 1). Pour les équations d'énergie, il faut noter que les flux de chaleurs n'apparaissent pas : en effet, bien qu'on les ait supposés non nuls dans la couche, le fait qu'ils soient nuls à l'extérieur suffit à les faire disparaître des équations de saut. Pour finir, l'équation de Maxwell-Faraday $\partial_t(\mathbf{B}) = -\nabla \times (\mathbf{E})$ entraîne la conservation de la composante tangentielle du champ électrique $\mathbf{E}_{T1} = \mathbf{E}_{T2} = \mathbf{E}_T$, ce qui s'écrit, compte tenu que la loi d'Ohm idéale est supposée vérifiée de part et d'autre :

$$u_{n2} \mathbf{B}_{T2} - B_{n2} \mathbf{u}_{T2} = u_{n1} \mathbf{B}_{T1} - B_{n1} \mathbf{u}_{T1} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_T$$

c) Le repère de deHoffmann-Teller

On a déjà dit que le repère de calcul est choisi de telle sorte que la discontinuité soit immobile. Ceci fixe le mouvement du repère selon la normale ; mais, le problème posé étant invariant pour n'importe quelle translation dans le plan tangent, il reste un degré de liberté en ce qui concerne le mouvement tangentiel du repère utilisé. Nous choisirons en général le repère dit de « deHoffmann-Teller », du nom des premiers auteurs à l'avoir mentionné [deHoffmann and Teller, 1950]. Par définition, ce repère est celui dans lequel la vitesse est parallèle au champ magnétique, c'est à dire, grâce à la loi d'Ohm idéale, le champ électrique nul. Le fait que $\mathbf{E} = 0$ partout simplifie en effet notablement l'étude des discontinuités.

Pour démontrer qu'un tel repère existe, il faut d'abord remarquer que dans chaque milieu (amont ou aval), le fait que la composante tangentielle du champ électrique soit nulle suffit en général à entraîner que le vecteur champ électrique complet est nul :

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

En effet, l'utilisation de la loi d'Ohm idéale montre que lorsque \mathbf{E}_T est nul, \mathbf{u}_T et \mathbf{B}_T sont nécessairement colinéaires (tant que u_n et B_n sont non nuls), et donc que E_n est nul aussi.

On sait annuler le champ électrique d'un côté de la discontinuité (amont ou aval) par simple changement de repère à la vitesse $\frac{\mathbf{E}}{B} \times \mathbf{b}$ (cf. chapitre 2). Cela revient à ajouter à la vitesse du plasma la vitesse nécessaire pour que la vitesse résultante soit alignée avec le champ magnétique. Puisque la composante tangentielle du champ électrique \mathbf{E}_T est conservée à la traversée de la discontinuité, l'annulation du champ électrique tangentiel d'un côté entraîne nécessairement sa nullité de l'autre côté et, d'après la remarque précédente, les champs électriques complets sont donc nuls de part et d'autre dans le repère considéré.

Il existe toutefois un cas où on ne peut pas trouver de repère de deHoffmann-Teller, c'est celui des discontinuités strictement perpendiculaires $B_n = 0$, où le champ est tangentiel à la discontinuité. Dans ces conditions, deux cas peuvent se présenter :

- $u_n \neq 0$: impossible d'annuler \mathbf{E}_T .
- $u_n = 0$ (discontinuité tangentielle) $\Rightarrow \mathbf{E}_T = \mathbf{0}$, mais E_n n'est en général pas nul, ni conservé à la traversée.

4. Différents types de discontinuités pouvant exister dans un plasma *

a) Solutions du système

On se place dans le repère de deHoffmann-Teller défini précédemment et on omet les indices 2 pour alléger l'écriture. L'équation de saut déduite de l'équation de conservation de l'impulsion peut se projeter sur les directions normale et tangentielle, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \rho u_n^2 + p + \frac{B_T^2}{2\mu_0} &= \Phi_{in} \\ \rho u_n \mathbf{u}_T - \frac{B_n \mathbf{B}_T}{\mu_0} &= \Phi_{iT} \end{aligned}$$

La seconde relation peut se simplifier en utilisant la relation de deHoffmann-Teller $\mathbf{u}_T = \frac{u_n}{B_n} \mathbf{B}_T$ (venant de $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_T = \mathbf{0}$) et se mettre sous la forme :

$$\left(u_n - \frac{B_n^2}{\mu_o \Phi_m} \right) \mathbf{B}_T = \frac{B_n}{\Phi_m} \Phi_{iT} \Rightarrow \left(u_n - \frac{B_n^2}{\mu_o \Phi_m} \right) \mathbf{B}_T = \left(u_{n1} - \frac{B_n^2}{\mu_o \Phi_m} \right) \mathbf{B}_{T1}.$$

Cette relation montre qu'il existe deux types de solutions assez différentes :

- Le champ magnétique tangentiel garde sa direction au passage de la discontinuité et il est déterminé par la relation ci-dessus. On dit que la discontinuité ainsi obtenue est "coplanaire", car les champs, et donc aussi

les vitesses dans le repère de *deHoffmann-Teller*, se trouvent dans un même plan en amont et en aval. On peut parler de « réfraction des lignes de champ » (cf. figure 8). Le plan commun est déterminé par la normale et la direction du champ magnétique incident (\mathbf{B}_{T1} , \mathbf{B}_T , \mathbf{u}_{T1} , \mathbf{u}_T étant tous colinéaires). C'est ce type de solutions qu'on appelle des *chocs*.

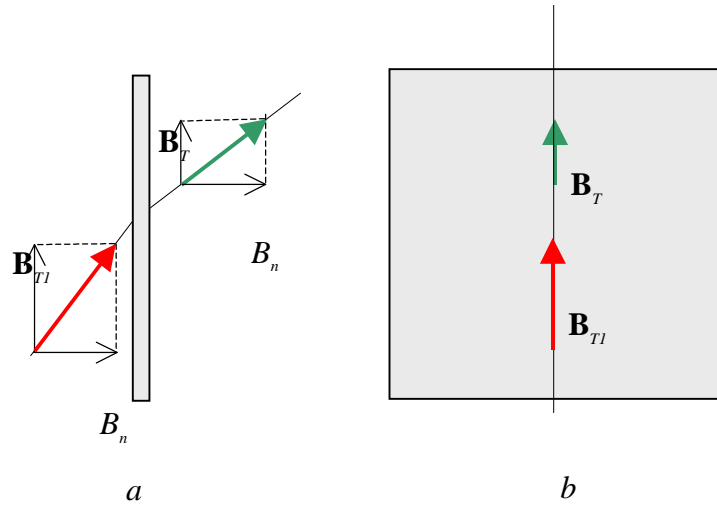


Figure 8. Evolution du champ magnétique à la traversée d'une onde de choc (discontinuité coplanaire) (a) en projection dans le plan perpendiculaire à la discontinuité, (b) dans le plan de la discontinuité. En rouge le champ amont, en vert le champ aval

- ii. Une seconde solution de l'équation ci-dessus consiste à annuler les deux parenthèses, ce qui supprime la contrainte sur le champ tangentiel. Dans ce cas, le champ tangentiel peut tourner et la discontinuité est appelée rotationnelle (figure 9).

b) Les propriétés des discontinuités rotationnelles

Comme on vient de le voir, on a dans ce cas :

$$u_n - \frac{B_n^2}{\mu_o \Phi_m} = u_{n1} - \frac{B_n^2}{\mu_o \Phi_m} = 0 \Rightarrow u_n = u_{n1} = \frac{B_n^2}{\mu_o \Phi_m}$$

Comme toutes les quantités autres que u_n qui apparaissent dans cette expression sont conservées, la composante normale de la vitesse doit l'être aussi. La relation de conservation de l'impulsion normale implique que la densité est conservée également. Il s'agit donc d'une discontinuité qui ne s'accompagne ni d'un ralentissement du plasma, ni d'une compression, ce qui est bien différent des chocs.

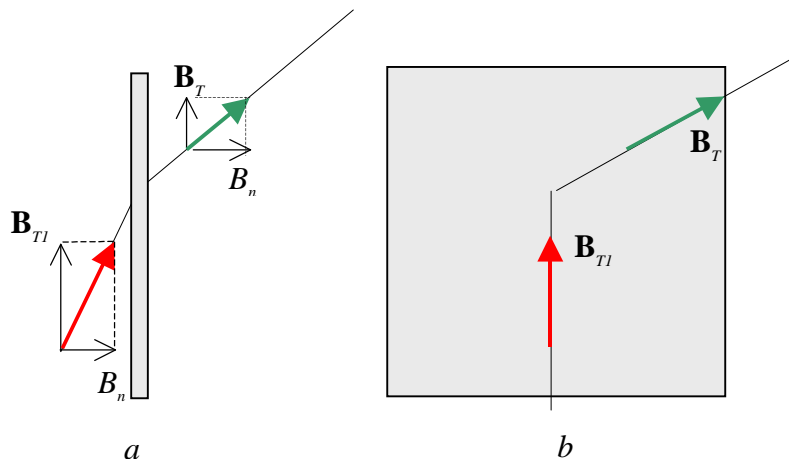


Figure 9. Evolution du champ magnétique à la traversée d'une discontinuité rotationnelle (a) en projection dans le plan perpendiculaire à la discontinuité, (b) dans le plan de la discontinuité. En rouge le champ amont, en vert le champ aval.

Dans ces conditions, la relation de conservation de l'impulsion projetée sur la direction de la normale entraîne la conservation de $p + \frac{B_T^2}{2\mu_0}$. Mais en fait, p et B_T^2 sont conservés séparément car la relation de conservation de l'énergie (en simplifiant les termes qui sont d'évidence conservés) implique la conservation de :

$$\rho \frac{v_T^2}{2} u_n + \frac{5}{2} p u_n - \frac{1}{\mu_0} (B_n (\mathbf{B}_T \cdot \mathbf{u}_T) - B_T^2 u_n)$$

En remplaçant la vitesse tangentielle par son expression en fonction du champ tangentiel, on trouve une expression qui ne dépend plus que du module du champ tangentiel au carré B_T^2 ; ce dernier est donc bien conservé lui aussi. Ceci justifie encore davantage le nom de la discontinuité rotationnelle puisque la composante tangentielle du champ magnétique ne fait que subir une rotation, sans changement de module. Il en va de même pour la vitesse tangentielle (dans le repère de *deHoffmann-Teller*).

On se souviendra donc que, dans une discontinuité rotationnelle, les quantités suivantes sont conservées :

$$\boxed{u_n, \rho, p, B_T, u_T}$$

On se souviendra également que la discontinuité rotationnelle se propage, par rapport au plasma, à la vitesse d'Alfvén le long du champ magnétique : ce n'est rien d'autre que la forme non linéaire de l'onde d'Alfvén torsionnelle.

c) Les chocs

Les chocs sont caractérisés par la coplanarité du champ magnétique (et de la vitesse dans le repère de *deHoffmann-Teller*). La résolution du système, en éliminant toutes les variables sauf la vitesse normale, conduit à une équation en u_n dont la solution est représentée sur la figure 10. Pour les valeurs très grandes de la vitesse normale incidente u_{nI} (plus à droite que la partie de la courbe représentée sur la figure), la courbe remonte vers une asymptote oblique de pente inférieure à 1.

Une première solution est la solution triviale, $u_n = u_{nI}$: elle correspond à l'absence de discontinuité qui est toujours solution du système de départ. Les autres solutions qui ont un sens physique sont celles qui ont pour effet de diminuer la vitesse normale (l'énergie perdue étant dissipée dans la discontinuité) et qui correspondent donc à $u_n < u_{nI}$. On constate donc que d'une part toutes les vitesses incidentes ne donnent pas de solution et d'autre part qu'il y a trois familles de solutions, dont nous allons voir qu'elles correspondent à des discontinuités ayant des propriétés différentes.

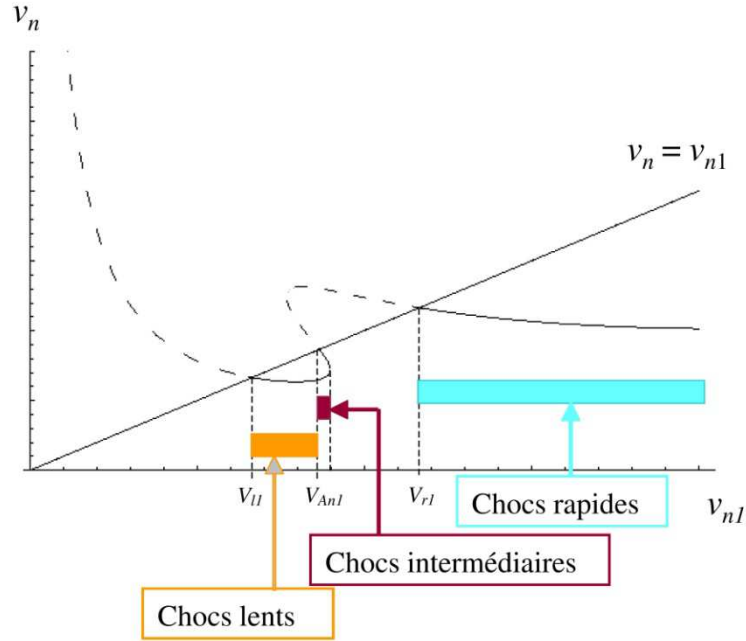


Figure 10. Solutions de l'équation en v_n pour le cas des discontinuités coplanaires (chocs).
(paramètres choisis pour le calcul : $\theta = 30^\circ$, $\beta = 0,8$)

Les différents types de solutions sont séparés par les vitesses particulières V_{l1} , V_{i1} , V_{r1} , indiquées sur la figure, qui correspondent aux intersections de la courbe avec la première bissectrice. La résolution de l'équation permet d'identifier ces vitesses particulières comme étant les vitesses de phase dans le milieu 1 respectivement du mode lent (V_{l1}), du mode d'Alfven (ou mode « intermédiaire » : $V_{i1}=V_{An1}$) et du mode rapide (V_{r1}) pour une onde qui se propagerait selon la direction de la normale à la discontinuité. Pour les modes rapides et lents, on peut interpréter ce résultat de la manière suivante : pour un point très proche de l'un de ces points d'intersection u_n tend vers u_{n1} , l'écart entre les deux devenant petit, on peut linéariser les équations et il est donc normal de retrouver les solutions du système linéaire.

Les solutions sont donc dénommées à partir des solutions linéaires correspondantes :

le **choc lent**, pour $V_{l1} < u_{n1} < V_{i1}$

le **choc rapide**, pour $V_{r1} < u_{n1}$

Pour $V_{i1} < u_{n1} < V_{s1}$, on qualifie la solution de **choc intermédiaire** (V_{s1} étant la valeur supérieure correspondant à la tangente verticale de la courbe). La vitesse V_{i1} est la vitesse de phase du mode d'Alfven, mais il est important de noter que la limite du choc intermédiaire lorsque u_{n1} tend vers V_{i1} *n'est pas* le mode d'Alfven linéaire. Le mode d'Alfven est en effet la limite linéaire de la discontinuité rotationnelle et non pas du choc intermédiaire (la polarisation de ce mode en effet est bien rotationnelle et non pas coplanaire, cf. chapitre 6). La raison pour laquelle la fréquence V_{i1} du mode d'Alfven apparaît dans le calcul des discontinuités coplanaires est que la rotationalité et la coplanarité ne sont pas des propriétés strictement contradictoires : il suffit que la rotation de \mathbf{B}_T se fasse sur exactement un demi-tour (ou un nombre entier de demi-tours) pour que le champ en aval se retrouve dans le même plan que le champ amont. On vérifiera en effet ci-dessous que, pour un choc intermédiaire, \mathbf{B}_T et \mathbf{u}_T se retournent (changement de signe) ; ce retournement n'est manifestement pas du ressort des variations linéaires et on notera que le choc intermédiaire constitue donc toujours, même lorsque u_n subit un saut infinitésimal, une solution non linéaire.

Comme nous venons de le voir, chaque choc (lent, intermédiaire, rapide) doit avoir, pour exister, une vitesse incidente u_{n1} supérieure à une vitesse de propagation caractéristique (v_{l1} , v_{i1} , v_{r1}). On pourrait vérifier de même qu'en aval la vitesse normale u_{n2} est chaque fois plus petite que la vitesse caractéristique correspondante (v_{l2} , v_{i2} , v_{r2}). On retrouve là l'équivalent d'un résultat bien connu pour les gaz neutres : la vitesse normale est supersonique en amont et subsonique en aval. Pour les vitesses incidentes n'appartenant à aucune des trois gammes définies ci-dessus, il n'existe pas de discontinuité possible.

Les trois types de chocs identifiés ci-dessus ont des propriétés différentes auxquelles on peut accéder en achevant la résolution du système. Une des caractéristiques qui les différencie concerne la variation du champ magnétique tangentiel. Les champs de part et d'autre du choc sont reliés par :

$$\left(u_n - \frac{V_i^2}{v_n}\right) \mathbf{B}_T = \left(u_{n1} - \frac{V_{i1}^2}{v_{n1}}\right) \mathbf{B}_{T1} \quad \text{en notant } V_{i1}^2 = \frac{B_n^2}{\mu_o \rho_1} = \frac{B_n^2}{\mu_o \Phi_m} u_{n1} \quad \text{et} \quad V_i^2 = \frac{B_n^2}{\mu_o \rho} = \frac{B_n^2}{\mu_o \Phi_m} u_n$$

soit encore $\mathbf{B}_T = F(u_n) \mathbf{B}_{T1}$, avec $F(u_n) = \frac{u_{n1} - \frac{V_{i1}^2}{v_{n1}}}{u_n - \frac{V_i^2}{v_n}}$.

C'est le facteur F qui détermine la variation du champ magnétique. Son étude montre que, pour les chocs intermédiaires, il est négatif, ce qui signifie bien qu'il y a retournement du champ magnétique tangentiel au passage de la discontinuité. La vitesse tangentielle est reliée au champ magnétique tangentiel par un facteur qui ne change pas de signe, et elle subit donc le même retournement. Pour les chocs rapides et lents, F est positif et les champs tangentiels de part et d'autre sont dans le même sens. En ce qui concerne le module de \mathbf{B}_T , il augmente ou il diminue selon que le facteur F est, en valeur absolue, plus grand ou plus petit que 1. On peut montrer qu'il est plus petit que 1 pour les chocs intermédiaires et lents (diminution de l'énergie magnétique), et plus grand que 1 pour les chocs rapides (augmentation de l'énergie magnétique).

On peut donc finalement résumer les propriétés des chocs dans le tableau suivant :

<i>Choc lent</i>	<i>Choc intermédiaire</i>	<i>Choc rapide</i>
Diminution de u_n, B_T Augmentation de ρ, p	Diminution de u_n, B_T Augmentation de ρ, p Retournement de B_T, u_T	Diminution de u_n Augmentation de ρ, p, B_T

d) La discontinuité tangentielle

Il s'agit d'un cas très particulier où le champ magnétique normal est nul, en même temps que la vitesse normale. Ceci supprime toute relation entre les champs magnétiques tangentiels de part et d'autre qui se trouvent ainsi découplés. Il en va de même pour les vitesses tangentielles. Seule la conservation de la composante normale de l'impulsion fournit encore une relation entre l'amont et l'aval. Elle se traduit par la conservation de $p + B^2/2\mu_o$, c'est-à-dire de la somme des pressions cinétique et magnétique.

Remarques :

- Si $u_n = 0$ mais $B_n \neq 0$, presque toutes les variables du système sont alors obligatoirement conservées. La seule solution non triviale est alors une solution où seulement la densité et la température varient, mais de telle sorte que leur produit, la pression, reste constant. C'est alors ce qu'on appelle une « discontinuité de contact ».
- Les hypothèses inverses $B_n = 0$ mais $u_n \neq 0$ caractérisent un choc rapide en propagation perpendiculaire ; aucune propriété singulière n'y est attachée.
- On constate qu'une grande partie de la discussion sur la nature de la discontinuité est basée sur le fait que les composantes normales du champ magnétique ou de la vitesse sont nulles ou pas. Cela pose un problème expérimental : il n'est pas toujours facile d'affirmer qu'une mesure est nulle. Les questions d'incertitude de mesure interviennent forcément.

INDEX

- accélération de Fermi, 36
- Alfvén, 78
- amortissement Landau, 70, 76, 85
- amortissement Landau des ondes acoustiques ioniques, 97
- amortissement Landau des ondes plasma, 96
- angle d'attaque, 26
- bêta-tron, 34
- Boltzmann, 11, 18, 46, 47
- boucles de piégeage, 88
- ceintures de radiation, 30
- centre-guide, 33
- CGL, 55
- champ gelé, 58, 65
- choc, 54, 106, 115
- cône de perte, 40
- confinement, 9, 30
- confinement inertiel, 20
- confinement magnétique, 20, 32
- dérive, 27, 28, 31
- discontinuité, 109, 110
- discontinuité de contact, 117
- discontinuité rotationnelle, 114
- discontinuité tangentielle, 117
- effet Landau, 91, 94, 96
- énergie thermique, 52, 53
- équation d'état, 49, 50, 53
- équation de continuité, 52
- équation de fermeture, 53, 59, 69
- équation de Fokker-Planck, 48
- équation de Vlasov, 48, 55, 85, 91, 108
- équations conservatives, 64
- équations de transport, 64
- équations fluides, 51
- espèces, 56
- flux de chaleur, 52
- fonction de distribution, 18, 40, 43, 47
- fonction de Fried et Cont, 94
- force de Laplace, 60
- force de pression magnétique, 60
- force miroir, 30, 39
- formule de Plemelj, 94, 99
- fréquence de coupure, 71, 72, 75, 82
- fréquence de résonance, 74, 77, 82
- fréquence hybride haute, 74
- fusion, 20
- gyrofréquence, 25
- gyrotropie, 55
- héliosphère, 22
- indice, 72
- invariant adiabatique, 32, 33
- ionosphère, 7, 8, 17, 21, 22, 28, 35
- ITER, 28
- Landau, 94
- laser, 21
- lentille plasma, 73
- linéarisation, 67
- loi d'Ohm, 61
- lois polytropes, 55
- longueur de Debye, 70
- magnétosphère, 22, 107
- maxwellienne, 46, 47, 48, 70, 90, 94, 95
- MHD, 59
- miroir, 39
- mode extraordinaire, 74, 75
- mode ordinaire, 74, 75
- moment magnétique, 33
- monofluide, 60
- mouvement cyclotron, 25
- onde acoustique-ionique, 75, 97
- onde de Langmuir, 16, 68, 70, 85
- onde simple, 109
- ondes d'Alfvén, 77, 78, 80, 115
- ondes électrostatiques, 16
- ondes plasma, 70
- oscillation de plasma, 68
- particules piégées, 88
- particules résonnantes, 87
- plasmas spatiaux, 22
- point miroir, 40
- polarisation, 68
- population, 56
- pression partielle, 51
- rayon de Larmor, 25
- rayonnement kilométrique terrestre, 81
- reconnexion, 65, 66
- relation de dispersion, 16, 68
- résonance, 77, 95
- Soleil, 20, 107
- température cinétique, 50
- tenseur des contraintes, 50
- TOKAMAK, 28, 30
- transformée de Laplace, 94, 98, 100, 102, 103
- variations lentes, 57
- vent solaire, 22
- vitesse acoustique-ionique, 76
- vitesse d'Alfvén, 78
- vitesse de groupe, 16
- z-pinch, 63