Examen E3 Plasma spatiaux

11 février 2025

Exercice 1 : Modèle de Parker et champ électrique interplanétaire

On cherche à établir un modèle de vent solaire non-magnétisé, en régime permanent ($\partial_t \equiv 0$, $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{0}$). On considère que le plasma est constitué d'une population d'électrons (indices e) et d'une population de protons (indices p) couplés par un champ électrique.

Les deux populations sont décrites par les moments des fonctions de distribution $(n_e, \overrightarrow{u_e}, \mathrm{T}_e)$ et $(n_p, \overrightarrow{u_p}, \mathrm{T}_p)$. On note $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ le champ électrique dans le plasma, M la masse du soleil, G la constante de gravitation, k la constante de Boltzmann, $e > 0$ la charge du proton, m_p la masse du proton, m_e celle de l'électron.

On considère que le système comporte une symétrie sphérique, donc que les quantités physiques ne dépendent que de r, la distance au centre du repère (qui est placé au centre du soleil). On note $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}(r)\vec{e}_r$, $\overrightarrow{u_e} = u_e(r)\vec{e}_r$, $\overrightarrow{u_p} = u_p(r)\vec{e}_r$.

On considère que les deux fluides sont isothermes (T_e et T_p ne dépendent pas de r).

1) Ecrire les équations de conservation de la densité et de la quantité de mouvement pour les électrons et les protons.

2) Dans la suite, on considère le plasma comme quasi-neutre, et le courant comme nul en tout point.
a) Justifiez ces deux hypothèses.
b) Que ces hypothèses impliquent-t-elles pour les grandeurs n_e, u_e, n_p, u_p ?

3) Montrer que dans la limite où l'inertie des électrons est négligeable ($m_e \to 0$), le champ électrique peut s'exprimer comme

$$\mathrm{E} \simeq -\frac{k\mathrm{T}_e}{en_e}\frac{dn_e}{dr}$$

4) Montrer que cette relation entre E et le gradient de pression électronique est équivalent à dire que la population électronique est en tout point en équilibre de Boltzmann dans le potentiel $\varphi(r)$ dont dérive le champ électrique.

5) On considère dans la suite que les protons sont beaucoup plus froids que les électrons, i.e. $\mathrm{T}_p \ll \mathrm{T}_e$. Montrez que le champ électrique dans le plasma s'exprime

$$\mathrm{E} \simeq \frac{m_p u_p}{e}\frac{du_p}{dr} + \frac{\mathrm{GM}m_p}{er^2}.$$

Discutez la signification physique de ces deux termes.

6) Montrez que le champ de vitesse des protons est décrit par une équation de la forme

$$\frac{(u_p/c_s)^2 - 1}{u_p}\frac{du_p}{dr} = f(r)$$

on exprimera la fonction $f(r)$, dans laquelle intervient un rayon caractéristique r_c dont on donnera l'expression et l'interprétation physique. On a introduit une grandeur c_s, donnez son expression et son interprétation physique.

7) Tracez sur un diagramme (r, u_p) les différents types de solutions $u_p(r)$ de l'équation précédente, et commentez la nature physique de chacune d'elles.

8) On appelle $u_{ts}(r)$ le champ de vitesse du vent solaire dans le cas dit *trans-sonique*. En intégrant l'équation trouvée en 6, donner une relation liant $u_{ts}(r)$ à r.

9) Montrer que quand $r \gg r_c$, la vitesse $u_{ts} \sim 2c_s\sqrt{\ln r/r_c}$, en déduire que le champ électrique interplanétaire, loin du soleil, décroit comme $\mathrm{E} \sim \mathrm{U}_0/r$. On donnera l'expression du potentiel U_0.

10) Cette estimation du champ électrique est-elle selon vous valable en tout point du milieu interplanétaire ? Dans le cas contraire donnez (très approximativement) la région dans laquelle cette expression est valable.

Exercice 2 : Fréquence de coupure ionosphérique

Dans cet exercice on cherche à évaluer un ordre de grandeur de la fréquence de coupure des ondes radio dans l'ionosphère. On considère l'ionisation par irradiation UV de l'atmosphère terrestre. On note q_{em} le taux d'ionisation par unité de volume maximal. Dans le cadre du modèle de Chapman, ce taux est donné par

$$q_{em} = \frac{\mathrm{N}_\nu(\infty)\cos\chi}{\exp(1)\mathrm{H}}.$$

1) Donnez la signification physique des grandeurs intervenant dans cette expression.

2) En vous aidant des paramètres numériques donnés ci-dessous, et en explicitant vos calculs, donnez un ordre de grandeur de q_{em} dans l'atmosphère terrestre.

3) On considère que les ions et les électrons se recombinent selon une réaction dissociative

$$\mathrm{XY}^+ + e^- \rightarrow \mathrm{X}^* + \mathrm{Y}^*$$

dont la constante de réaction vaut k_{dis}. En explicitant vos calculs, donnez un ordre de grandeur de la concentration n_e maximale d'électron dans l'ionosphère terrestre.

4) En déduire un ordre de grandeur de la fréquence de coupure des ondes radio dans l'ionosphère.

Paramètres numériques :
- Masse atomique du diazote $\mathrm{M}_{\mathrm{N}_2} \simeq 47 \times 10^{-27}$ kg
- Masse de l'électron $m_e \simeq 9,1 \times 10^{-31}$ kg
- $\mathrm{N}_\nu(\infty) \simeq 5 \times 10^{14}$ $\mathrm{m}^{-2}.\mathrm{s}^{-1}$
- $k_{dis} \simeq 7 \times 10^{-14}$ $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$
- Constante de Boltzmann $k \simeq 1,4 \times 10^{-23}$ $\mathrm{J.K}^{-1}$.
- Charge de l'électron $e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ C
- Permittivité du vide $\epsilon_0 \simeq 8,9 \times 10^{-12}$ $\mathrm{F.m}^{-1}$

Appendice : équations fluides

— Equation de continuité (conservation du nombre de particules), qui relie la densité n (scalaire) à la vitesse moyenne $\mathbf{u}$ (vecteur) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } n\mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

— Equation de conservation de l'impulsion, qui relie la vitesse moyenne $\mathbf{u}$ (vecteur) à la pression p (dans le cas général un tenseur d'ordre 2, nous considérerons dans ce cours, pour éviter de trop compliquer, des milieux isotropes, et donc une pression scalaire $p = nk\mathrm{T}$).

$$mn\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) = -\nabla p + n\mathbf{F} \tag{2}$$

— Equation de conservation de l'énergie, qui relie l'énergie interne (ou la pression) au flux de chaleur $\mathbf{j}_{th}$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(nm\frac{u^2}{2} + \frac{3}{2}p\right) + \text{div}\left[\mathbf{u}\left(nm\frac{u^2}{2} + \frac{5}{2}p\right) + \mathbf{j}_{th}\right] = n\mathbf{u}\cdot\mathbf{F} + \mathrm{Q} \tag{3}$$

Dans cette équation, le terme $\mathbf{j}_{th}$ décrit le transport de chaleur par conduction thermique, tandis que Q (en [W.m^{-3}]) décrit le transfert de chaleur depuis une source extérieure à la population de particules considéré (Q > 0 si la chaleur entre dans le système).