

Module 2P021

Electromagnétisme et Electrocinétique

Cours d'Arnaud Zaslavsky, année 2019

Contact :

arnaud.zaslavsky@obspm.fr

ou

arnaud.zaslavsky@sorbonne-universite.fr

Organisation de l'UE

Cours : 17 séances de 2h (34h)

- 6 séances le jeudi de 13h45 à 15h45 : amphi 34A
- 11 séances le vendredi de 10h45 à 12h45 : amphi 24
- Mineure & mono-disciplinaire

Travaux dirigés & assimilés : 20 séances de 2h (40h)

- Polys de TD/TP distribués pendant la 1ere séance de TD
- 14 séances de TD
- 4 séances de résolution de problèmes (RP) - **évaluées**
- 2 séances de tutoriels
- **ATTENTION AUX SALLES !!**

Attention échange CM3 / TD2

CM

MONO1-2-3-4
MIN1-2-3-4

Vendredi

10h45 - 12h45

AMPHI. 24

CM2 – 25/01

TD2 (**CM3 - 01/02**)

ATTENTION

**CM3 DU VENDREDI 01/02 DEPLACE AU JEUDI 31/01 - 13h45/15h45
AMPHI. 34A ET**

**TD2 DU JEUDI 31/01 DEPLACES AU VENDREDI 01/02 10H45 -
12H45 SALLES SUIVANTES :**

MIN1 SALLE 14.24.110	MIN2 SALLE 23.24.202
MIN3 SALLE ATRIUM 249	MIN4 SALLE ATRIUM 317
MONO1 SALLE ATRIUM 319	MONO2 ATRIUM 325
MONO3 SALLE ATRIUM 429	MONO4 SALLE 24.25.103

TD

MONO1-2-3-4
MIN1-2-3-4

Jeudi

13h45 - 15h45

CM3 (**TD2 -31/01**)

ATTENTION

**CM3 DU VENDREDI 01/02 DEPLACE AU JEUDI 31/01 - 13h45/15h45
AMPHI. 34A ET**

**TD2 DU JEUDI 31/01 DEPLACES AU VENDREDI 01/02 10H45 -
12H45 SALLES SUIVANTES :**

MIN1 SALLE 14.24.110	MIN2 SALLE 23.24.202
MIN3 SALLE ATRIUM 249	MIN4 SALLE ATRIUM 317
MONO1 SALLE ATRIUM 319	MONO2 ATRIUM 325
MONO3 SALLE ATRIUM 429	MONO4 SALLE 24.25.103

Organisation de l'UE

Travaux pratiques : 4 séances (16h) – évalués

- 2 TP : Electrostatique/Magnétostatique – Capacité/Induction
- 2 TP/TD sur l'électrocinétique (partie TD peut tomber à l'examen)

Une absence non justifiée en TP peut empêcher la validation de l'UE

En cas d'absence, il faut contacter Corinne Sandanassamy le plus tôt possible et sous 7 jours grand maximum pour trouver une séance de rattrapage

HPP (Heures de permanence pédagogique)

- Tous les **vendredis entre 16h et 18h**, à partir du 08/02 jusqu'au 12/04 inclus -
Dernier cours le (12/04)
- **En Salle 24-34-103**

Modalités d'évaluation

Contrôle continu sur 25 points

- 1 Contrôle en amphithéâtre (fin février, 18h15-19h45 ?) : 17 pts
- 4 Résolution de problèmes : 8 pts (note globale)

Travaux pratiques sur 15 points

- un compte rendu à rendre à la fin de chaque séance, chacun compte pour 1/4.

Examen 1ère session sur 60 points

Question : vous êtes en :

1. Monodisciplinaire physique
2. Mineure Physique + Majeure Mathématiques
3. Mineure Physique + Majeure Biologie
4. Mineure Physique + Majeure Chimie
5. Mineure Physique + Majeure Mécanique
6. Mineure Physique + Majeure Electronique
7. Mineure Physique + Majeure Géosciences
8. Mineure Physique + Majeure Informatique
9. Autre chose

Electromagnétisme : introduction générale

Electromagnétisme : unification de deux concepts historiquement considérés comme distincts, l'électricité, et le magnétisme

Unification réalisée par Maxwell (1864)

- Deux **champs vectoriels** dont les propriétés sont déterminées et reliées par 4 équations :
- Electrostatique (Maxwell-Gauss)
- Magnétostatique (Maxwell-Ampère)
- Induction (Maxwell-Faraday)
- Absence de monopole magnétique

On ajoutera un terme dit « courant de déplacement » (introduit par Maxwell pour rendre les équations compatibles avec la notion de conservation de la charge) à l'équation de Maxwell-Ampère.

On en déduira que la nature électromagnétique de la lumière (Hertz, 1888).

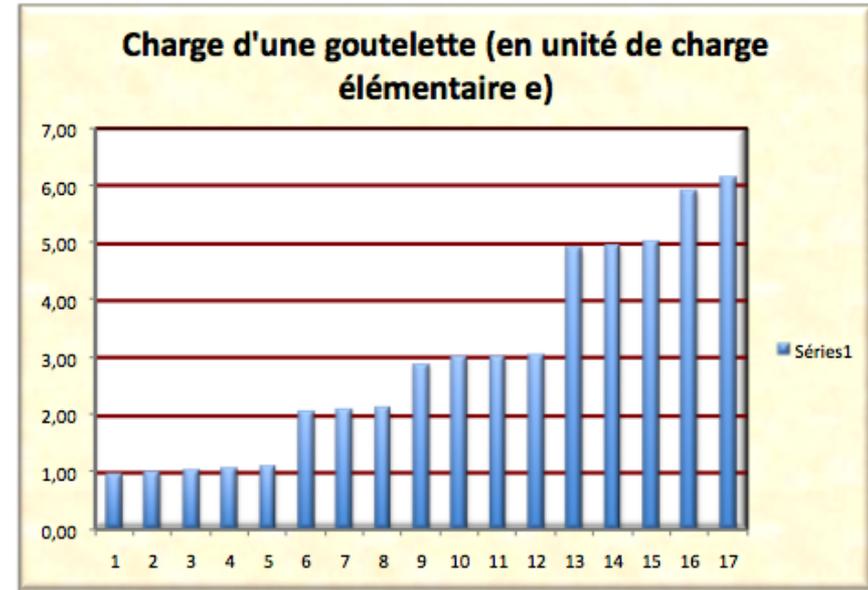
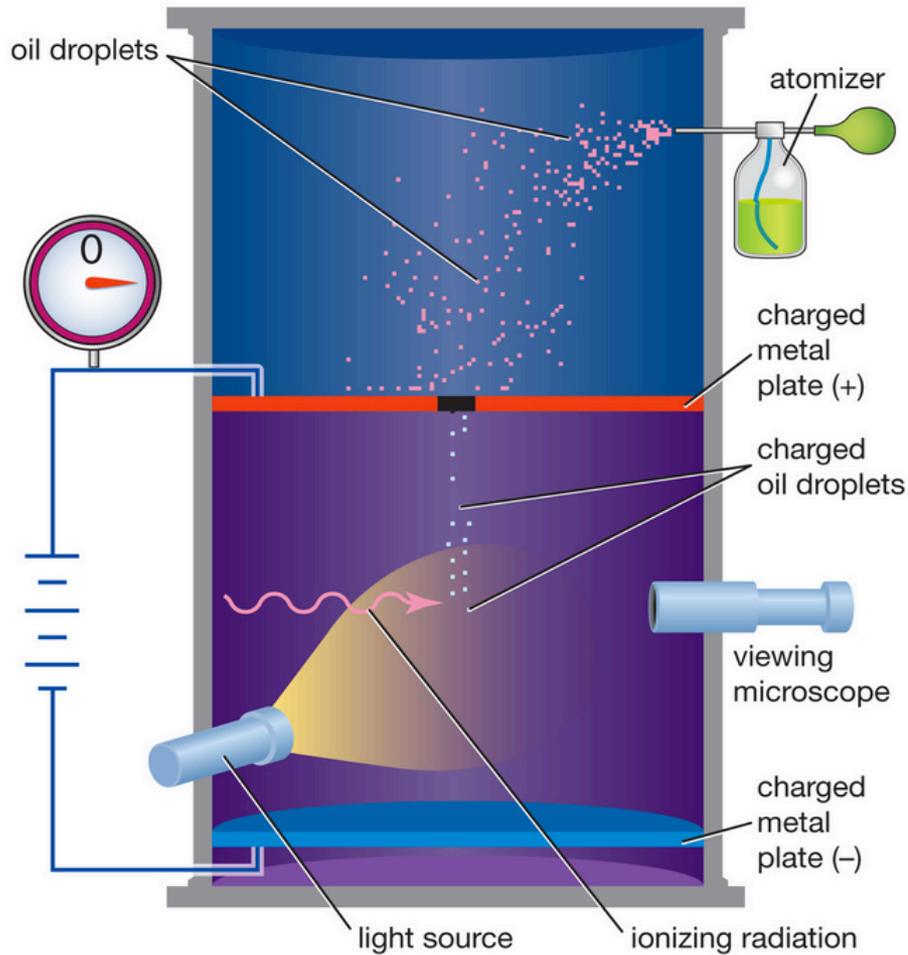
Chapitre 1 :

Electrostatique

Notion de charge électrique

- **La charge électrique est une propriété fondamentale de la matière**, tout comme peut l'être la masse.
- Elle quantifie l'intensité des interactions électromagnétiques entre objets
- **Il existe des charges positives et des charges négatives** (à la différence du cas de l'interaction gravitationnelle)
- **La charge électrique est quantifiée** (expérience de Milikan, 1909). Par convention, l'électron porte une charge $-e$, le proton porte une charge $+e$.
- $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ (*note : le Coulomb n'est pas une unité SI fondamentale. Il est défini comme $1 \text{ C} = 1 \text{ A.s}$*)
- **La charge d'un système isolé se conserve**

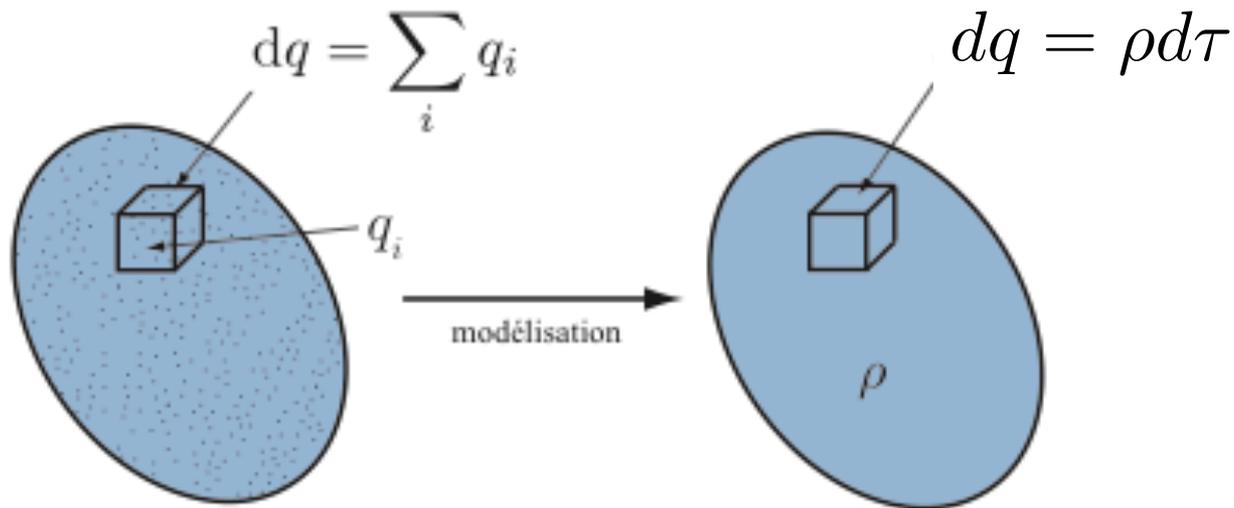
Expérience de Milikan



$$v_{goutte} \simeq \frac{1}{\nu} (qE + mg) = v_0 + nv_1$$

Modèle : Distribution continue de charges

- Lorsqu'on se place à une échelle suffisamment grande (quand il y a un grand nombre de charge dans un élément de volume $d\tau$ qu'on considère comme infinitésimal), il est pratique de considérer la charge comme continue

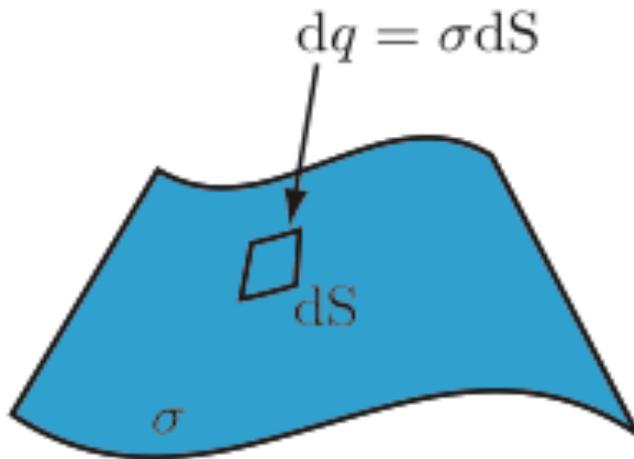


- On a ainsi défini la **densité volumique** de charge (en C.m^{-3}) :

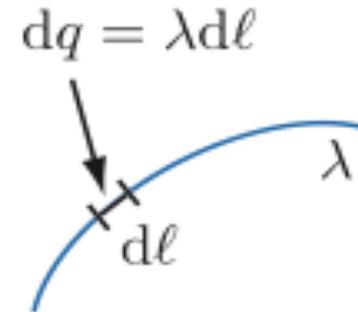
$$\rho = \frac{dq}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau}$$

Distribution surfaciques et linéiques

- De la même manière qu'on a défini une distribution volumique, on peut définir des **densités surfaciques, ou linéiques**, de charge

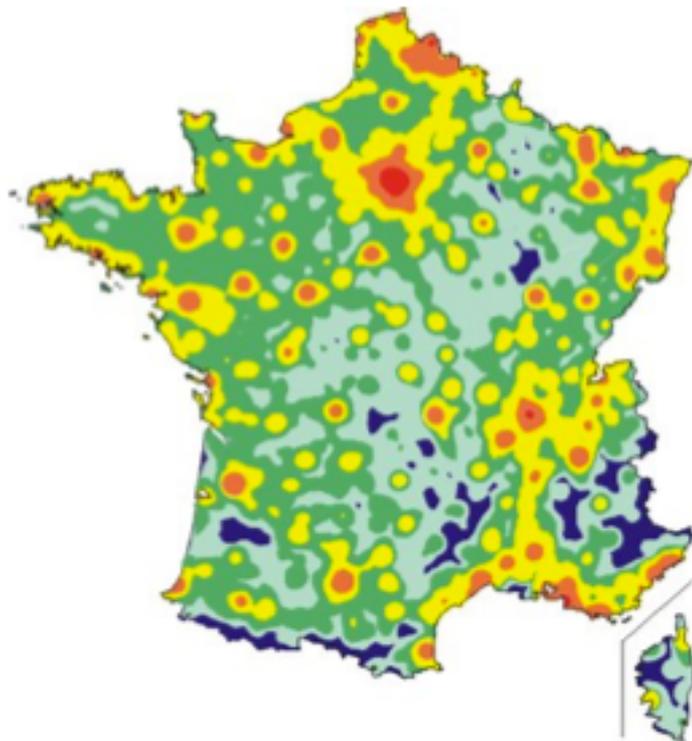


$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \quad \text{en C}\cdot\text{m}^{-2}$$



$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad \text{en C}\cdot\text{m}^{-1}$$

Petite analogie...



Densité de population 2006 en hab/km²



La densité de population en France (source INSEE 2006).

On représente par une distribution continue le nombre d'individu par unité de surface

Evidemment, cette densité (tout comme la densité de charge), peut dépendre de la position.

Quelques questions avant de poursuivre...

Charges électriques

À combien d'électrons correspond une charge de -160 nC ?

- 1 Dix mille milliards.
- 2 Un million de milliards.
- 3 Un milliard de milliards.
- 4 Aucune des réponses précédentes.
- 5 Je n'ai pas eu le temps de calculer.

Charges électriques

On charge un ballon de baudruche à l'aide d'une peau de chat, puis on le gonfle. Comment évolue la distribution surfacique de charge ?



- 1 Elle diminue.
- 2 Elle augmente.
- 3 Elle reste constante.

Une expérience

(électrisation par frottement...)

Force de Coulomb

- Comme on vient de le voir, deux particules (ou corps) chargées sont en interaction. On appelle **force de Coulomb** la force qui s'exerce entre deux **charges fixes** q_A et q_B séparées par une distance d



$$\vec{F}_{AB} = K \frac{q_A q_B}{d^2} \vec{u}_{AB}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$$

$$F_{AB} = K \frac{q_A q_B}{AB^3} \vec{AB}$$

ϵ_0 est la **permittivité du vide**

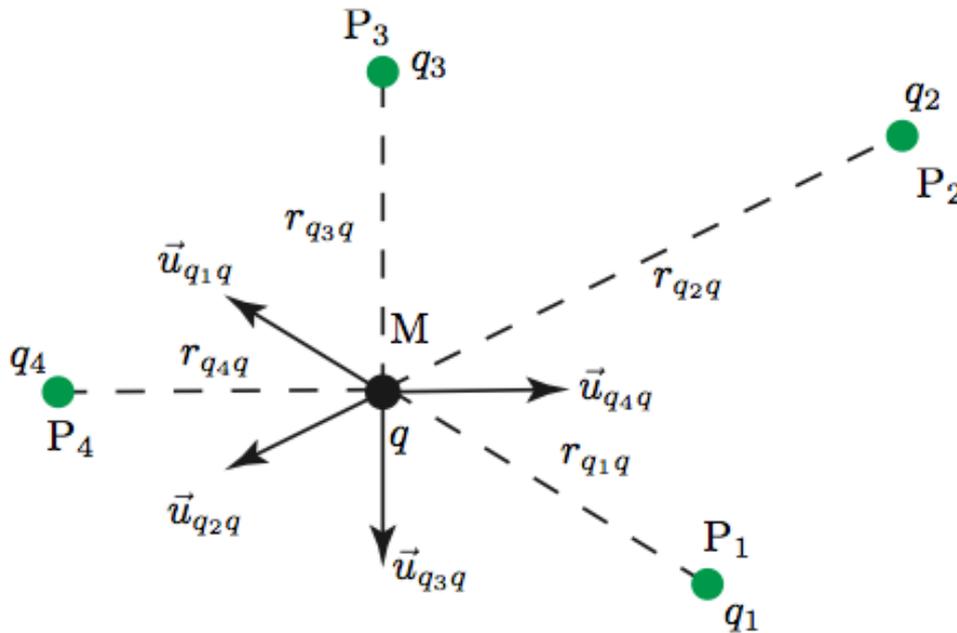
Force de Coulomb

- Quelques propriétés :
- Peut être attractive ou répulsive suivant le signe de $q_A q_B$
- Est portée par l'axe AB
- Décroit en $1/r^2$ (comme la force gravitationnelle / analogie : $G = -1/4\pi\epsilon_0$)
- Principe d'action/réaction : $\vec{F}_{BA} = K \frac{q_A q_B}{d^2} \vec{u}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$
- La force de Coulomb est conservative, c-à-d qu'il existe une fonction scalaire f telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} f$$

Principe de superposition

- En présence de plusieurs charges, la force exercée sur une charge q placée au point M est obtenue en sommant les forces de Coulomb produites par chacune des charges q_i placées au points P_i (différents de M). Il s'agit **du principe de superposition** :



$$\vec{F}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

Le champ électrique

- D'après le principe de superposition, on constate que la force de Coulomb exercée sur une charge q placée au point M peut s'écrire

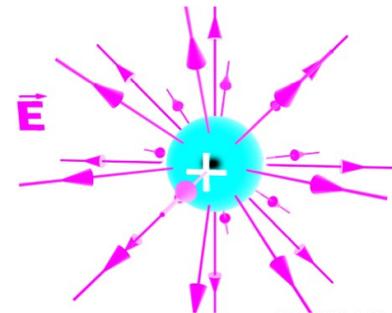
$$\vec{F}(M) = q \vec{E}(M)$$

- Où on a introduit le champ vectoriel :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

- **Le champ ne dépend que de la répartition des sources, et pas de la charge au point M**
- **Le champ crée par une charge ponctuelle est radial :**

$$E_r(r, \varphi, \theta) \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

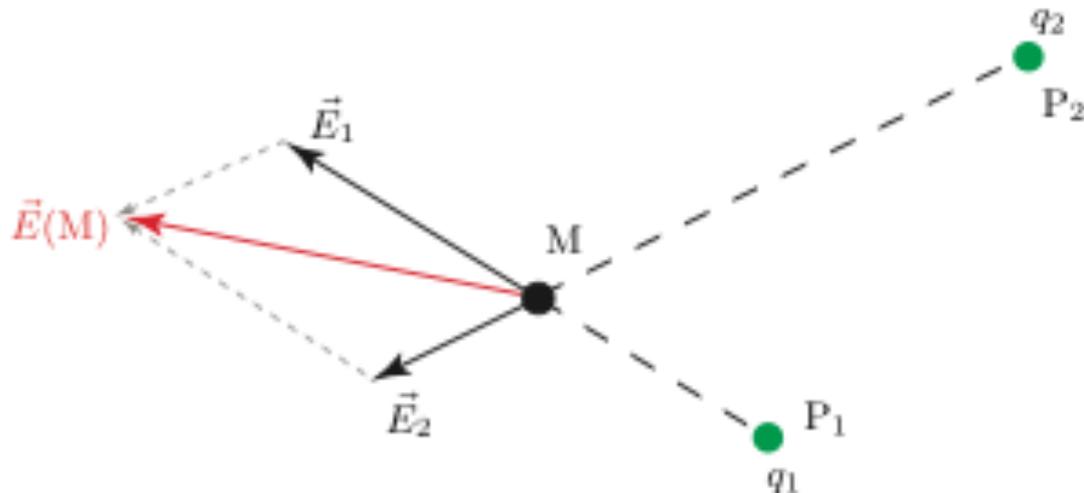


Principe de superposition

- Le principe de superposition vu précédemment s'écrit simplement pour le champ

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M)$$

Où $E_i(M)$ est le champ crée au point M par la charge placée en P_i



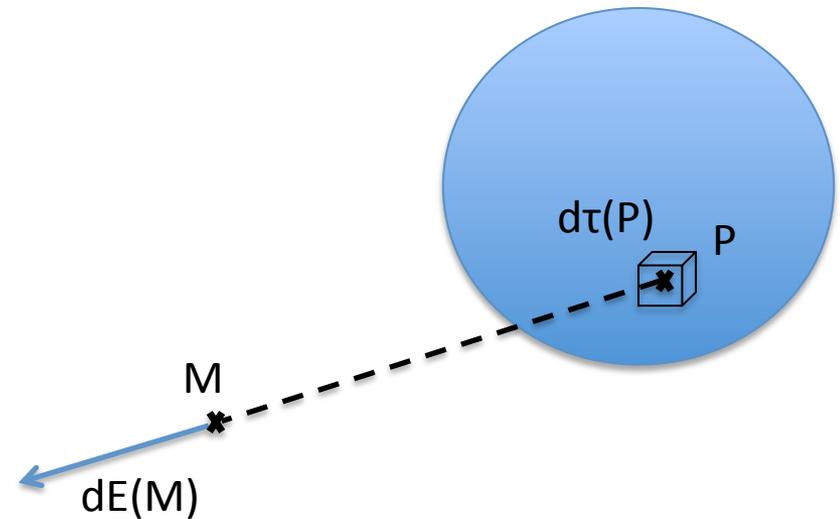
Champ crée par une distribution de charge continue

- D'après le principe de superposition, le champ crée en un point **M** par une distribution volumique de charge est la somme des champs infinitésimaux $d\vec{E}(M)$ créés par les charges élémentaires dq contenues dans le volume considéré

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

Donc en intégrant sur tout le volume

$$\vec{E}(M) = \iiint \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$



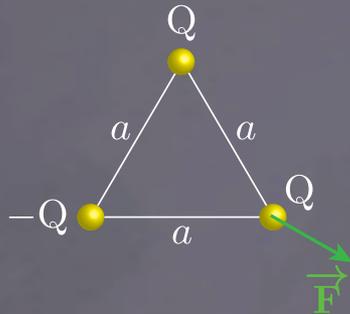
- Par le même raisonnement, les champs créés par des distributions de charges linéiques, ou surfaciques sont donnés par :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint dS \sigma(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

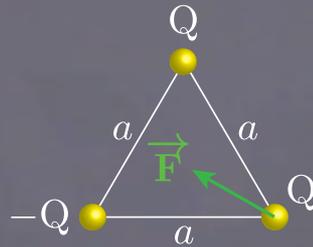
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\ell \lambda(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

Force de Coulomb

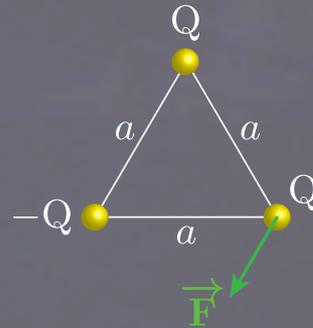
Trois charges sont disposées aux sommet d'un triangle équilatéral. Quel dessin fournit une représentation correcte de la force de Coulomb exercée sur la charge située en bas à droite ?



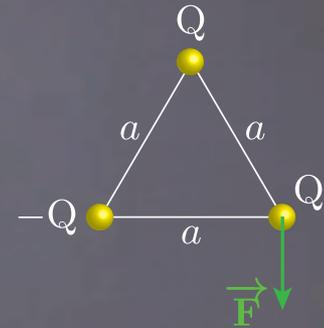
(1)



(2)



(3)



(4)

1 (1)

2 (2)

3 (3)

4 (4)

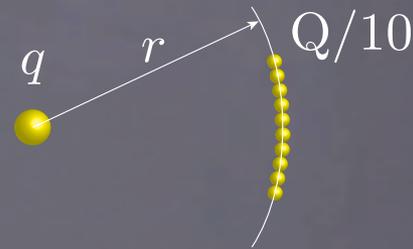
5 Aucun de ces dessins.

Force de Coulomb

On considère, dans une première situation, la force de Coulomb exercée par une charge Q sur une autre charge q . Dans une deuxième situation, on remplace la charge Q par 10 charges $Q/10$ réparties sur un arc de cercle de centre q .



situation 1



situation 2

Que dire de la force de Coulomb exercée sur q dans la situation 2 par rapport à la situation 1 ?

- 1 La force est plus importante dans la situation 1.
- 2 La force est plus importante dans la situation 2.
- 3 Les forces sont les mêmes dans les deux cas.
- 4 Les forces sont de même amplitude mais de direction différente.

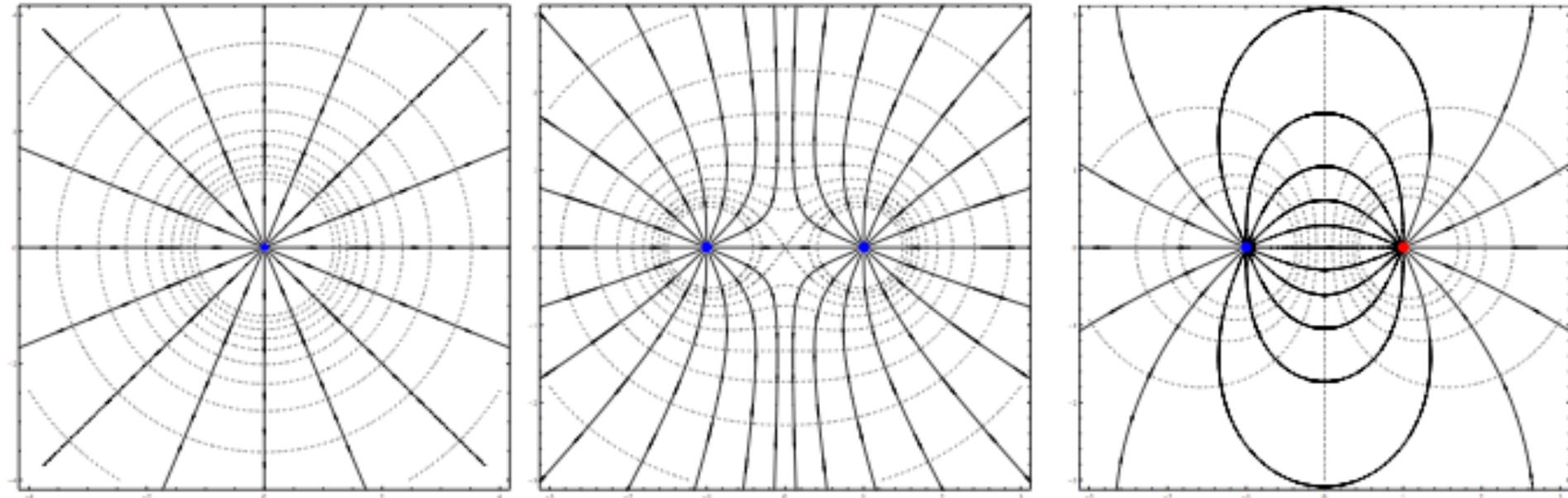
Représentation d'un champ vectoriel : les lignes de champ

- Une ligne de champ est une courbe orientée, telle qu'en tout point M de cette courbe, le champ électrique en M est tangent à la courbe, et dans le sens de l'orientation de la courbe



- Les lignes de champ ne donnent pas l'amplitude du champ, mais on peut en avoir une idée qualitative en regardant si les lignes se rapprochent (la norme de E augmente) ou s'éloignent (la norme diminue)

Quelques exemples...



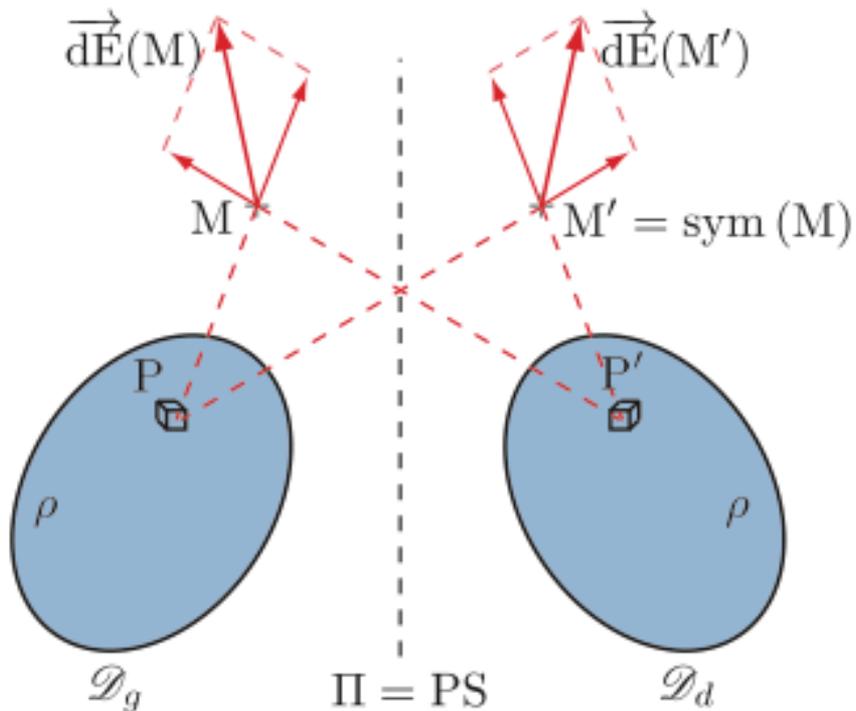
Liens entre les symétries de la distribution de charge et celle du champ ?

Règles d'invariances du champ électrique

- **Notion d'invariance** : Soit un système physique S soumis à une transformation T (translation, rotation, symétrie...). **Le système S est qualifié d'invariant par la transformation T si $T(S)=S$**
- Les invariances de la distribution de charge se retrouvent dans celles du champ : **si la distribution de charge ne dépend pas d'une coordonnée, le champ n'en dépendra pas non-plus.**
- **Deux principaux types d'invariances :**
 - Invariance par toute translation suivant un axe (par ex, Oz) : le champ E ne dépend pas de la coordonnée z
 - Invariance par toute rotation autour d'un axe (par ex, Oz) : le champ ne dépend pas de l'angle associé à cette rotation (ex, angle azimutal φ pour le système de coordonnées cylindriques associée à l'axe Oz)

Règles de symétrie du champ électrique

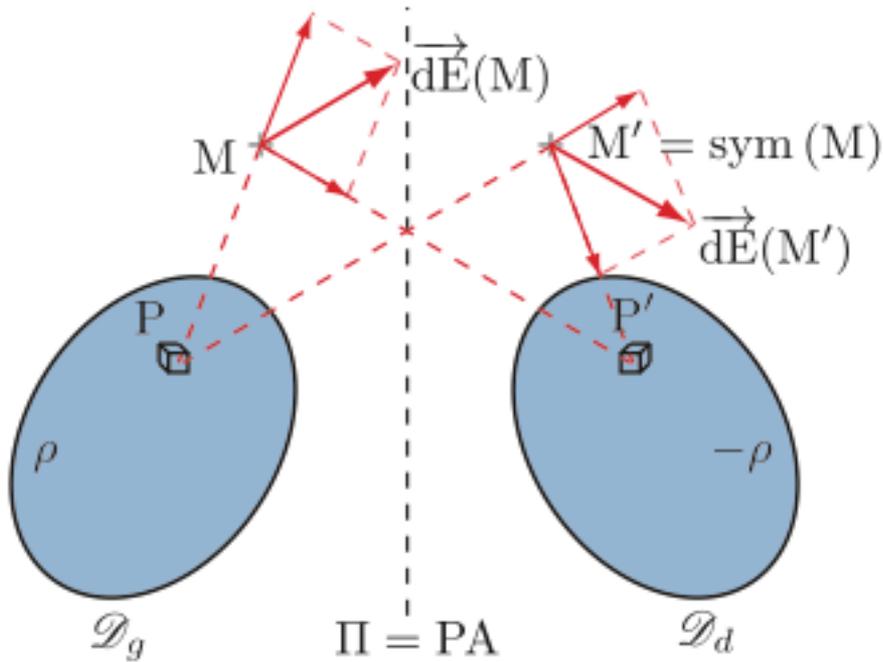
- Plan de symétrie (PS) d'une distribution de charge : tel que le symétrique de la distribution par rapport à ce plan est inchangée (redonne la même distribution de charge)



$$\vec{E}(\text{sym } M) = \text{sym } \vec{E}(M)$$

Règles de symétrie du champ électrique

- Plan d'antisymétrie (PA) d'une distribution de charge : tel que le symétrique de la distribution par rapport à ce plan donne l'opposé de la distribution (distribution d'origine, dans laquelle on inverse le signe de toutes les charges)



$$\vec{E}(\text{sym } M) = -\text{sym } \vec{E}(M)$$

Règles de symétrie du champ électrique

- Résumé IMPORTANT à retenir :

$$\begin{aligned} \text{PS} : \vec{E}(\text{sym } M) &= \text{sym } \vec{E}(M) \\ \text{PA} : \vec{E}(\text{sym } M) &= -\text{sym } \vec{E}(M) \end{aligned}$$

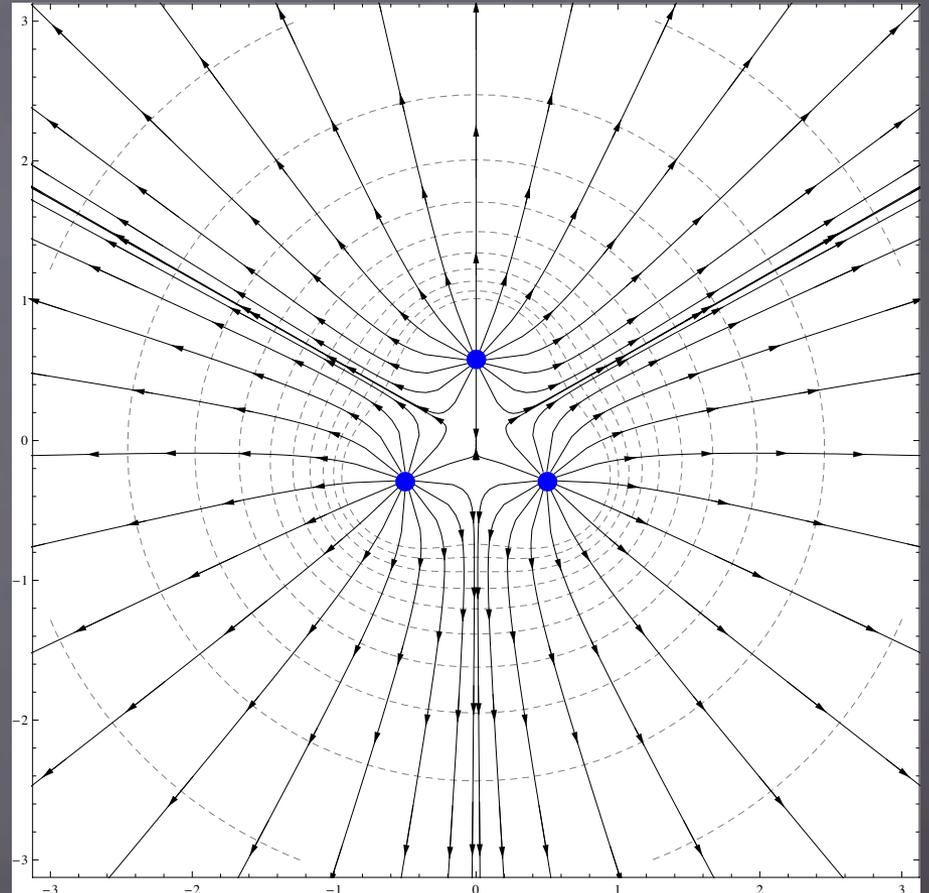
- Conséquence IMPORTANTE à retenir :

- i) Si M appartient à un plan de symétrie de la distribution de charge (noté PS), alors $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan. On dit souvent par abus de langage que \vec{E} appartient à ses plans de symétrie.
- ii) Si M appartient à un plan d'anti-symétrie de la distribution de charge (noté PA), alors $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan. On dit souvent que \vec{E} est perpendiculaire à ses plans d'antisymétrie

Lignes de champ électrique

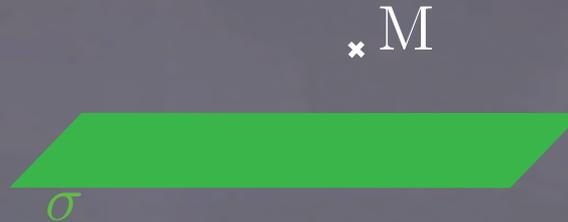
On considère les lignes de champ ci-contre.

- 1 Il n'y a pas de plan de symétrie.
- 2 Il y a un plan d'antisymétrie.
- 3 Les deux.
- 4 Aucune des propositions précédentes.



Invariance et symétrie

On considère un plan uniformément chargé en surface $\sigma > 0$, supposé horizontal.



Quelle est la direction et le sens du champ électrique au point M ?

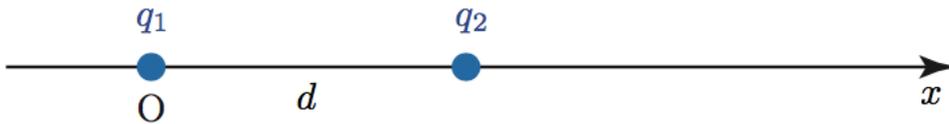


7 Aucune de ces directions.

Energie potentielle électrostatique

- Calculons l'énergie nécessaire à construire une distribution de charge simple (**énergie potentielle d'interaction de paire**) :

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3}$$



$$W_{op} = - \int_{\infty}^d \vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\text{avec } d\vec{\ell} = dx \vec{e}_x.$$

$$W_{op} = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{dx}{x^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

- Le travail à fournir par l'opérateur est par définition (cf cours de mécanique) égal à la variation d'énergie potentielle du système formé par les deux charges q_1 et q_2 :

$$W_{op} = \Delta E_p = E_p(d) - E_p(\infty)$$

$$\text{Et donc } E_p(d) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad \text{avec la convention } E_p(\infty) = 0$$

Potentiel électrostatique crée par une charge

- On définit le potentiel électrostatique crée au point M par une charge q placée au point O (on note $r = OM$) comme

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- L'énergie potentielle d'une charge q' placée à une distance r de O vaut donc

$$E_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} = q'V(r)$$

- Par construction (définition) de E_p , on a $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r$

et donc le champ électrique est lié au potentiel par

$$\vec{E} = -\frac{dV(r)}{dr}\vec{u}_r$$

(vrai dans le cas d'une seule charge en O, sinon il faut faire appel à la notion de gradient)

Potentiel électrostatique

- D'après le principe de superposition, l'énergie nécessaire pour amener une charge q de l'infini jusqu'à un point M , en présence d'un système de charges $q_{i=1,\dots,N}$ est donc

$$E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{P_i M}$$

- Elle peut s'écrire sous la forme $E_p = qV(M)$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{P_i M}, \text{ ou encore } V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(P)}{PM} d\tau$$

Puisque la force de Coulomb est par définition égale à l'opposé du gradient de E_p , on obtient **dans le cas statique** une relation générale entre le champ électrique et le potentiel :

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

Potentiel électrostatique, propriétés

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

- V est un « champ scalaire ». L'unité SI du potentiel est le Volt (V).
- V est (tout comme l'énergie potentielle) défini à une constante près. On prend en général la convention d'un potentiel nul à l'infini.
- Par linéarité de l'opérateur gradient, le principe de superposition s'applique aussi au potentiel
- Le champ créé par N systèmes de charges s'écrit en tout point M de l'espace comme la somme

$$V(M) = \sum_{i=1}^N V_i + C^{\text{te}}$$

Conséquence importante : \vec{E} est *non-rotationnel*

- Puisque dans le cas électrostatique, le champ peut s'écrire comme le gradient d'une fonction scalaire V , on peut facilement l'intégrer sur un chemin quelconque :

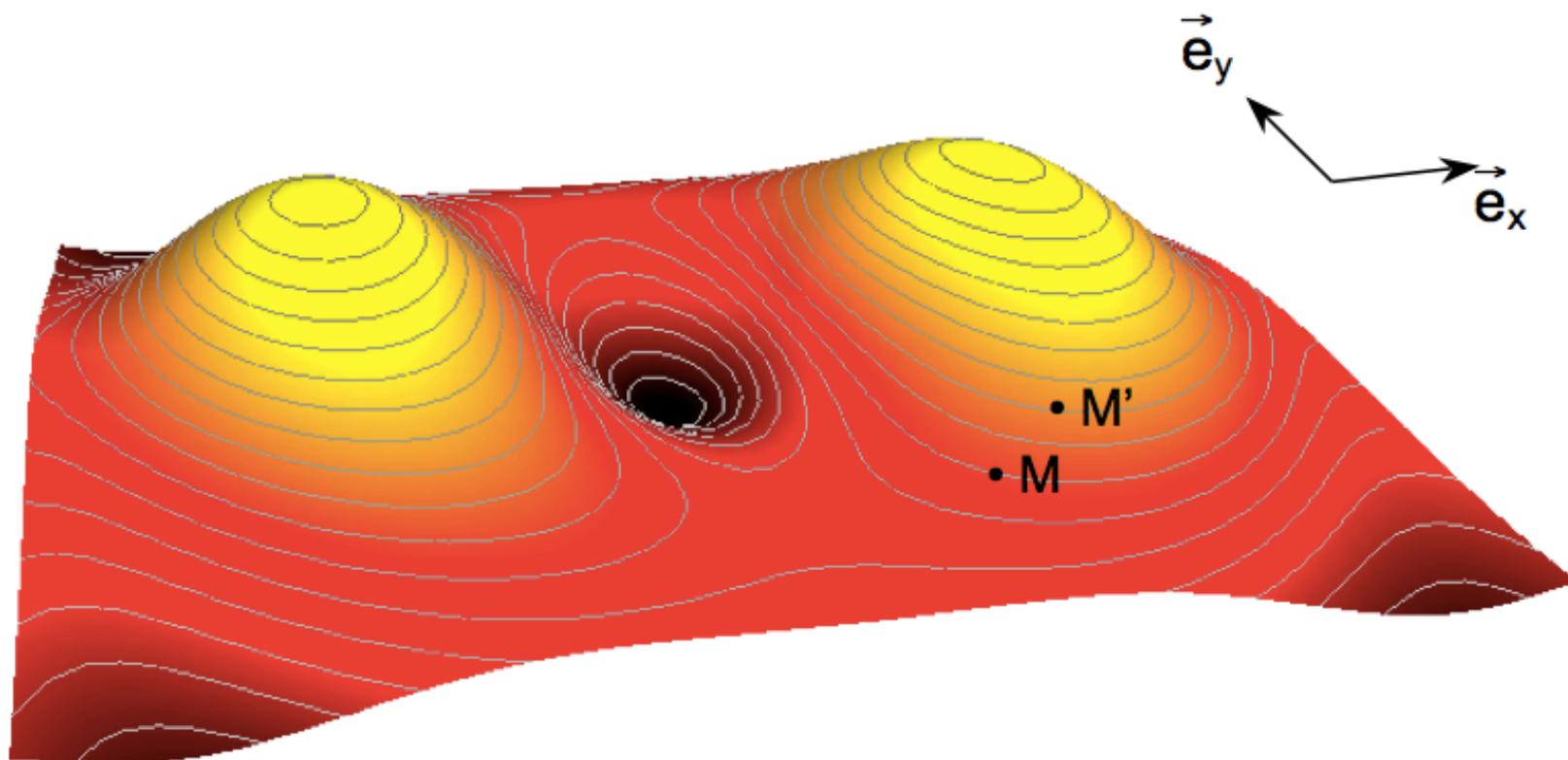

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_C -\text{grad}V \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B)$$

- Et donc le long d'un contour fermé :


$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \text{rot}\vec{E} = 0$$

(d'après le théorème de Stokes)

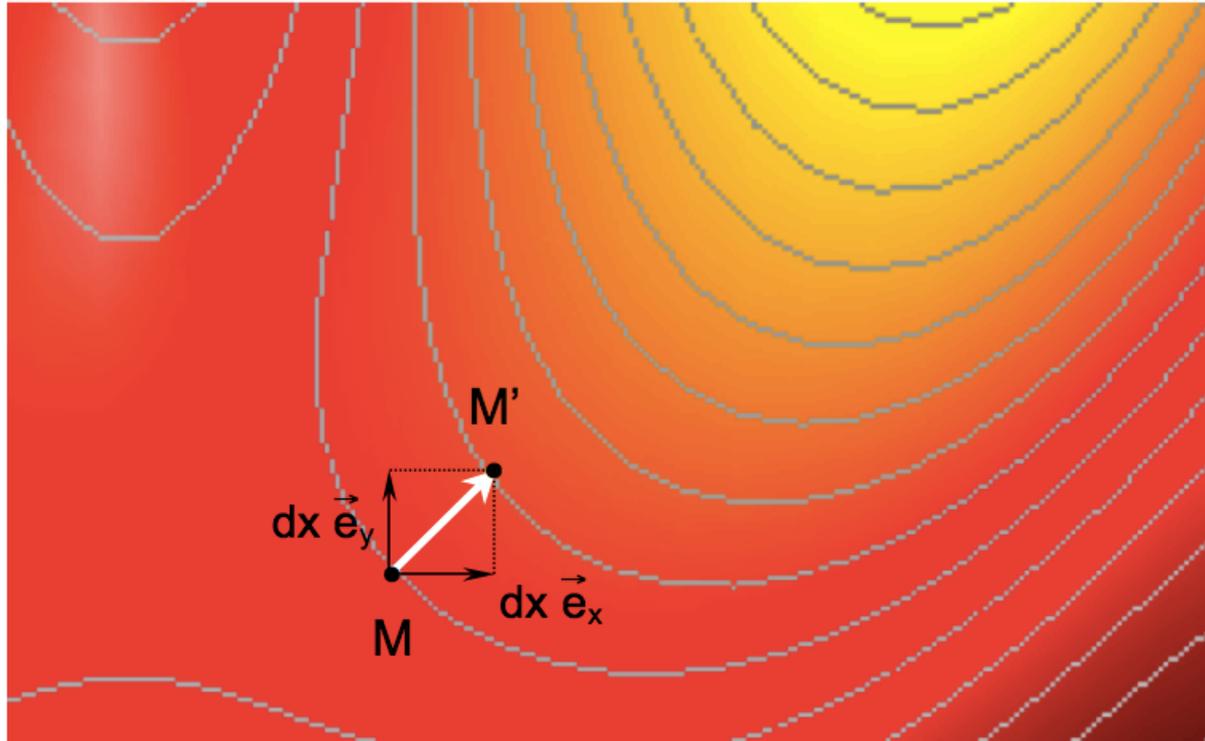
Représentation du champ : lignes équipotentielles (*isopotentielles*)



Vue en perspective de $V(x,y)$

Représentation du champ : lignes équipotentielles (*isopotentielles*)

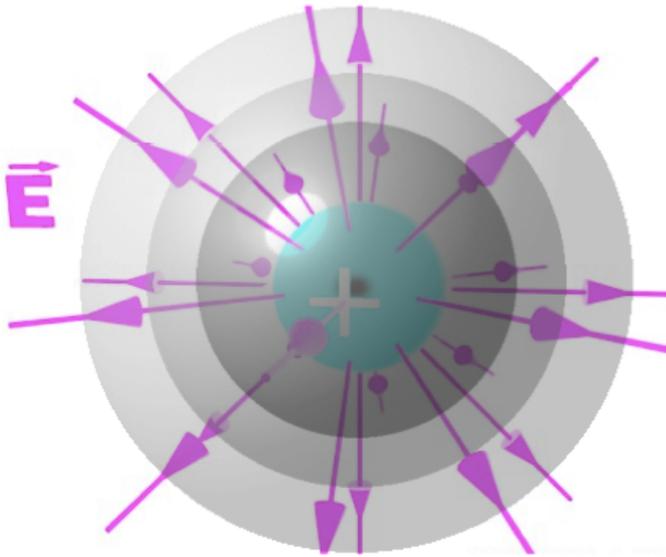
Vue perpendiculaire à (\vec{e}_x, \vec{e}_y)



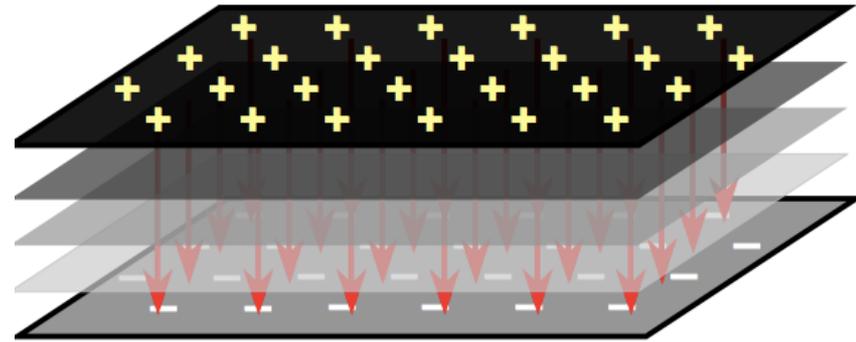
Le long d'une ligne équipotentielle : $dV = \text{grad}V \cdot d\vec{\ell} = 0$

Le champ électrique est **donc toujours perpendiculaire** aux lignes équipotentielles
(en 3D, la notion de lignes équipotentielle devient celle de **surface équipotentielle**)

Surfaces équipotentielles



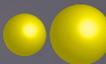
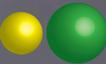
Pour une charge ponctuelle (ou toute autre distribution de charge à symétrie sphérique) : coquilles sphériques



Pour un condensateur plan

Énergie potentielle électrostatique

On considère deux particules chargées maintenues côte à côte. On relâche la contrainte sur la particule de droite. On s'intéresse à la vitesse maximale que va acquérir cette particule.

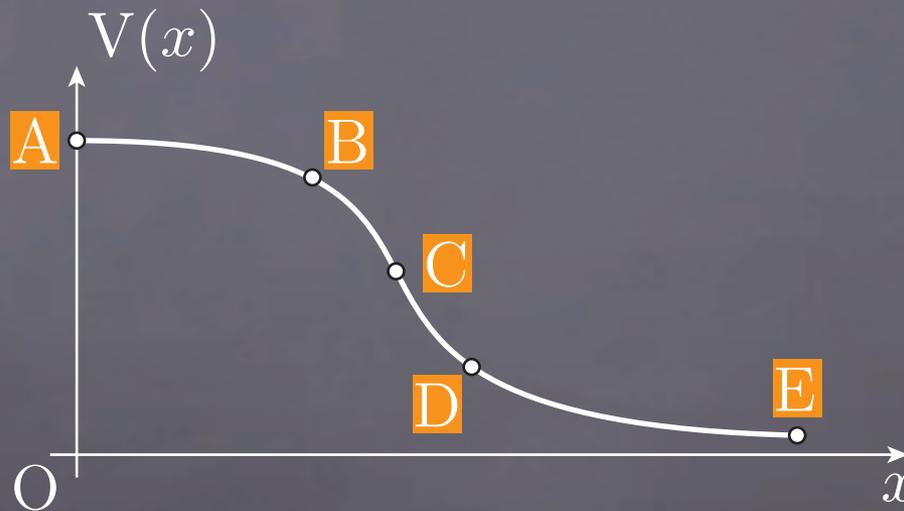
I	m, q		m, q
II	m, q		$2m, q$
III	m, q		$m, 2q$
IV	m, q		$2m, 2q$

Dans quelle(s) situation(s) cette vitesse maximale sera-t-elle la plus grande ?

- 1 I seulement.
- 2 II seulement.
- 3 III seulement.
- 4 IV seulement.
- 5 II et III seulement.
- 6 I et IV seulement.
- 7 Aucune des propositions précédentes.

Potentiel électrique

On considère une région de l'espace où règne un potentiel $V(x)$ ne dépendant que de la coordonnée x et dont on donne une représentation ci-dessous. En quel point le champ électrique est-il le plus grand ?



Potentiel électrique

On dépose sans vitesse initiale une charge négative dans une région de l'espace où règne un champ électrique. Comment se déplace la charge ?

- 1 Vers une zone de potentiel électrostatique plus élevé.
- 2 Vers une zone de potentiel électrostatique plus faible.
- 3 Elle ne se déplace pas.
- 4 Pas assez d'informations pour conclure.

Energie potentielle d'un système de charges

- On a vu que le travail nécessaire à construire un système de deux charges q_1 et q_2 distantes de r_{12} (ou énergie potentielle de paire) était :

$$W = E_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

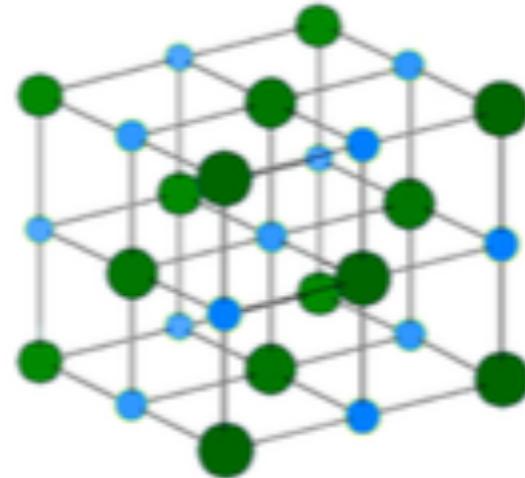
- Le travail nécessaire pour amener une troisième charge q_3 à une distance r_{13} de la charge 1 et r_{23} de la charge 2 est

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) = E_{13} + E_{23}$$

- Le travail nécessaire à un opérateur pour construire un système arbitraire de charge (soit son *énergie potentielle*) est ainsi la somme des énergies potentielles de paires :

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{paires}(i,j)} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Crystal ionique



$$E_p = -\frac{\alpha Ne^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

α : constante de Madelung (qui dépend de la maille du crystal), de l'ordre de l'unité.

Densité d'énergie électrostatique

(*Pression électrostatique*)

- L'énergie potentielle de la distribution de charge est

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{paires}(i,j)} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

- Ou encore $E_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$

- Pour une distribution continue de charge : $E_p = \frac{1}{2} \iiint \rho V d\tau$

- On peut montrer que : $E_p = \iiint_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau$

- On a donc une expression de la densité d'énergie électrostatique (ou encore *pression électrostatique*) en fonction du champ