Champ B et condensateur

Un conducteur est alimenté en courant variable $i(t)$. D'après le théorème d'Ampère sur le contour représenté ci-dessous, le champ magnétique au point M entre les armatures est-il nul ?

1 Oui

2 Non

Champ B et condensateur

Un conducteur est alimenté en courant variable $i(t)$. D'après la loi de Biot et Savart, le champ magnétique au point M entre les armatures est-il nul ?

1. Oui
2. Non

Le courant de déplacement

Les quatre équations de Maxwell telles qu'introduites dans les chapitres précédents :

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \qquad \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

L'équation de Maxwell-Ampère a une conséquence sur la forme des sources : elle impose que la divergence de la densité de courant soit nulle. Or on a vu précédemment que cela n'était vrai que dans le cas statique. Dans le cas général, un bilan de charge sur un volume fermé nous montre que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{j} = 0$$

Le respect de la conservation de la charge impose donc de modifier l'équation de Maxwell-Ampère, en y ajoutant à droite un terme dont la divergence vaut dρ/dt. D'après Maxwell-Gauss, ce terme, nommé « ***courant de déplacement*** », vaut

$$\vec{j_D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Courant de déplacement vs courant de conduction

$$\vec{\jmath} = \gamma\,\vec{E} \qquad \text{courants de conduction}$$

$$\vec{\jmath}_d = \varepsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{courants de déplacement}$$

Evaluons l'amplitude respective des courants de conduction et de déplacement, pour des variations temporelle de champ sur une échelle de temps typique ω^{-1}.

$$\gamma\,||\vec{E}_0|| \qquad \text{amplitude des courants de conduction}$$

$$\omega\,\varepsilon_0\,||\vec{E}_0|| \qquad \text{amplitude des courants de déplacement}$$

Le ratio amplitude du courant de conduction / amplitude du courant de déplacement vaut, pour ω = 2π.1 MHz :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1,1.10^{12} \gg 1 \quad \text{pour le cuivre} \\ \alpha &= 1,8 \simeq 1 \quad \text{pour le sol argileux} \\ \alpha &= 1,8.10^{-2} \ll 1 \quad \text{pour le verre} \end{aligned}$$

➡ **Le courant de déplacement est en général négligeable dans les conducteurs, et dominant dans les isolants**

Conséquence sur le théorème d'Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit donc, de manière générale

$$\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

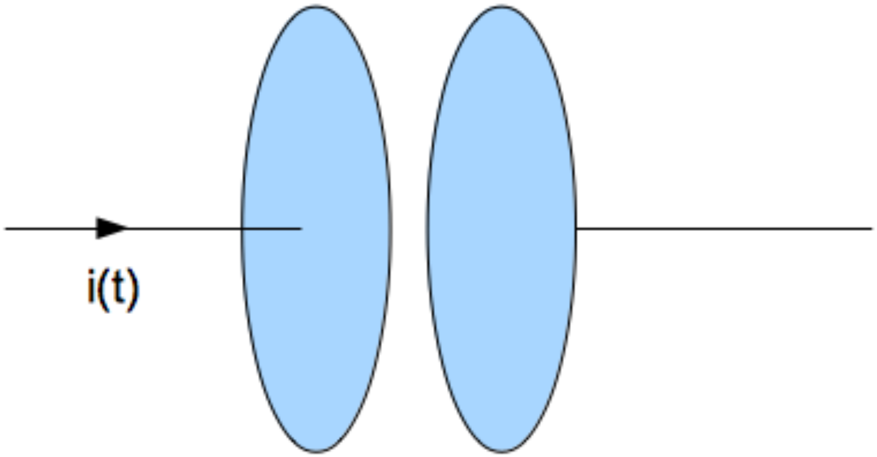
Ainsi, le théorème d'Ampère se généralise en régime variable dans le temps :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I_{enl} + \frac{1}{c^2} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

Où S est une surface appuyée sur le contour C, respectant la règle d'orientation de Stokes.

L'équation de Maxwell-Gauss n'étant pas modifiée, sa forme intégrale ne l'est pas non-plus : le théorème de Gauss reste valable dans les régimes variables dans le temps

Champ électromagnétique dans un condensateur plan

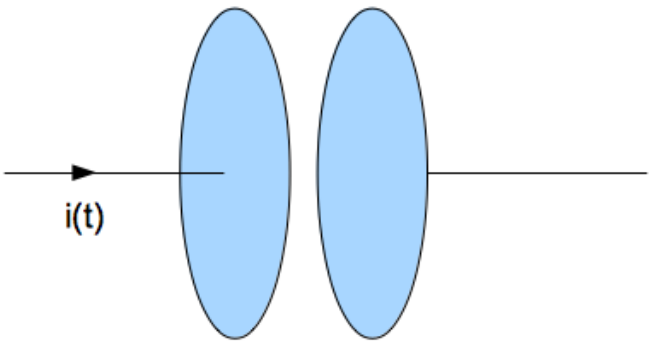


On considère deux armatures circulaires. On s'intéresse au champ suffisamment proche de l'axe Oz pour qu'on néglige tout effet de bord.

<u>Quelle est la direction du champ magnétique dans le condensateur ?</u>

1. **Selon e_z**
2. **Selon e_ρ**
3. **Selon e_φ**
4. **Le champ B est nul dans le condensateur**

Champ électromagnétique dans un condensateur plan



Les deux plaques sont séparées par un isolant : le courant qui traverse le condensateur n'est pas un courant de conduction, mais de déplacement (c'est pourquoi il est nul en régime continu)

Le champ E dans le condensateur vaut : $\overrightarrow{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_z} = \frac{Q(t)}{\pi a^2\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_z}$ (on néglige les effets de bord)

D'après les considérations de symétrie et invariances : $\overrightarrow{B}(M,t) = B(r,z,t)\,\overrightarrow{u_\theta}$

L'application du théorème d'Ampère généralisé entre les armatures (r<a) nous donne :

$$2\pi r\,B(r,z,t) = \mu_0 \dot{Q}\,\frac{r^2}{a^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{B(r,z,t) = \frac{\mu_0 \dot{Q}\,r}{2\pi\,a^2}}$$

Pour i(t) = I_0 cos(ωt), on obtient les expressions des champs :

$$\vec{E}(t) = \frac{I_0}{\omega\pi a^2\varepsilon_0} sin(\omega t)\vec{u_z} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}\cos(\omega t)\vec{u_\theta}$$

Equations de Maxwell et équation d'onde

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{r\vec{o}t}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \qquad \mathrm{r\vec{o}t}\ \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Équations de Maxwell, avec leurs termes sources (néanmoins parfois dites « dans le vide », par opposition à leur forme « dans les milieux »)

On utilise l'identité $\mathrm{r\vec{o}t}\ \mathrm{r\vec{o}t}\ = \mathrm{gr\vec{a}d}\ \mathrm{div}\ - \vec{\Delta}$

Et on obtient : $$\vec{\Delta}\vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overrightarrow{grad} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

et $$\vec{\Delta}\vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{rot} \vec{j}$$

En l'absence de source, on reconnaît l'équation de d'Alembert, caractérisant des ondes se déplaçant à la vitesse c : **le champ (E,B) se propage**

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\Delta}\vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \vec{\Delta}\vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned}}$$

Potentiels électromagnétiques, transformation de jauge

Comme on l'a vu précédemment, on peut déduire de l'équation de conservation du flux magnétique et de l'équation de Maxwell-Faraday la forme générale liant les potentiels aux champs :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}V$$

Le potentiel vecteur A est donc défini au gradient d'une fonction quelconque λ(x,y,z ; t) près : la transformation

$$\overrightarrow{A'} = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\lambda$$

ne change pas l'observable B. Comment doit être modifié le potentiel scalaire pour que le champ E soit lui aussi inchangé ?

$$-\vec{\text{grad}}\ V' - \frac{\partial \vec{A'}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Les champs sont donc invariants donc sous ***la transformation de jauge*** :

$$\overrightarrow{A'} = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\lambda$$

$$V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Equations aux potentiels

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, en fonction des potentiels :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A}\right) - \vec{\Delta}\vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Qu'on peut reformuler

$$\vec{\Delta}\vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

De même pour l'équation de Maxwell-Gauss :

$$div\left(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Qu'on peut reformuler:

$$\Delta V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left[div\vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right]$$

Deux choix de jauge apparaissent « clairement » pour simplifier ces équations

Choix d'une jauge

On choisit la jauge à simplifier autant que possible le calcul des potentiels pour une situation donnée. Deux jauges sont couramment utilisées

Jauge de Coulomb : $div\ \vec{A} = 0$

L'équation de Poisson de l'électrostatique est alors valable (il peut sembler étrange que V ne se « propage pas » mais réponde instantanément à un changement du terme source dans le cadre de cette jauge – cependant on peut bien vérifier que les champ E et B se propagent bien). Cette jauge est souvent utilisée dans les situations statiques.

Jauge de Lorenz : $div\vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$

Cette jauge **découple** et « symétrise » les équations d'évolution des potentiels électromagnétiques. Elle est adaptée aux situations variables dans le temps (propagation d'ondes notamment) :

$$\vec{\Delta}\vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\Delta V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Trouver la fonction de jauge λ(x,y,z ; t)

Etant donnés un couple de potentiels ($\mathbf{A_0}$,V_0), quelle transformation appliquer pour se placer dans la jauge de Lorenz ou de Coulomb ? Autrement dit, comment trouver la fonction λ adéquate ?

<u>Jauge de Coulomb</u> : On veut que le nouveau potentiel vecteur vérifie $\mathrm{div}\ \vec{A} = 0$

donc $$\mathrm{div}\ (\vec{A}_0 + \vec{\mathrm{grad}}\ \lambda) = 0$$

λ est solution de l'équation $$\Delta\lambda = -\mathrm{div}\ \vec{A}_0$$

<u>Jauge de Lorenz</u> : Le nouveau couple de potentiel doit vérifier $\mathrm{div}\ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

donc $$\mathrm{div}\ (\vec{A}_0 + \vec{\mathrm{grad}}\ \lambda) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(V_0 - \frac{\partial \lambda}{\partial t}) = 0$$

λ est solution de l'équation $$\Delta\lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\lambda = -\mathrm{div}\ \vec{A}_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial V_0}{\partial t}$$

Equations de Maxwell : Aspects énergétiques

Puissance cédée par le champ à la matière : Le champ interagit par le biais de la force de Lorentz. On a

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La puissance cédée à un élément de volume infinitésimal dτ vaut donc

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v} = \rho d\tau \vec{v} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Conservation de l'énergie W du champ dans un volume V :

$$-\frac{dW}{dt} = \wp_{cédée\ à\ la\ matière} + \wp_{rayonnée}$$

La **puissance rayonnée** est celle qui sort de la surface fermée S délimitant le volume V considéré. On peut l'écrire comme le flux à travers S d'une *densité de courant d'énergie* (analogie avec la densité de courant j pour la conservation de la charge*)* , que l'on nomme pour le moment Π

$$\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t} d\tau = -\iiint_V \vec{j}.\vec{E} d\tau - \oiint_S \vec{\Pi}.d\vec{S}$$

(on a introduit la densité volumique d'énergie w)

On peut réécrire cette équation sous forme locale, à l'aide du théorème d'Ostogradsky :

Equation de conservation de l'énergie du champ : $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$

Equations de Maxwell : Aspects énergétiques

On cherche à exprimer w et Π en fonction de E et B. **On prend le produit scalaire de Maxwell-Ampère par E**

$$\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}\right).\vec{E} = \mu_0\,\vec{j}.\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}$$

On utilise l'identité $div\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\,\vec{E} - \vec{E}.\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$

Et on obtient $\vec{B}.\overrightarrow{rot}\,\vec{E} - div\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right) \quad = \quad \mu_0\,\vec{j}.\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}$

On exprime le rotationnel de E à l'aide de Maxwell-Faraday, pour obtenir :

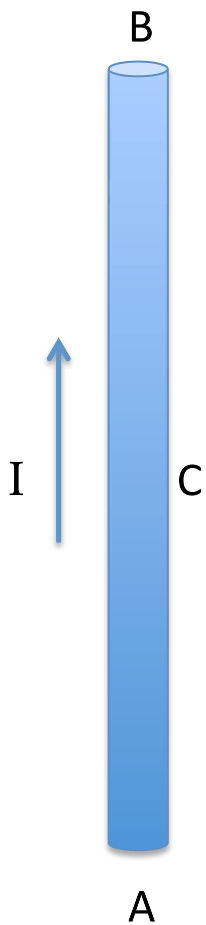
$$div\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \vec{j}.\vec{E} = 0$$

Tout comme elles contiennent la conservation de la charge, les équations de Maxwell contiennent la conservation de l'énergie électromagnétique. Par identification des termes, on a :

$w = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ **Densité d'énergie électromagnétique**

$\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ **Vecteur de Poynting**

Transport de l'énergie dans un câble



Un conducteur de conductivité non-nulle γ est parcouru par un courant I (ou une densité de courant j)

Il dissipe donc par effet Joule une quantité (j^2/γ) d'énergie par unité de volume et de temps

D'où vient l'énergie électromagnétique dissipée ?

1) De la section inférieure (A) du tube de courant
2) De la section supérieure (B) du tube de courant
3) Des parois latérales (C) du tube de courant

Condensateur : bilan énergétique

On reprend l'expression des champs obtenus précédemment :

$$\vec{E}(t) = \frac{I_0}{\omega\pi a^2\varepsilon_0} sin(\omega t)\vec{u_z} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}\cos(\omega t)\vec{u_\theta}$$

On obtient la densité d'énergie électrique, et l'énergie moyenne stockée :

$$w_e = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{I_0}{\omega\pi a^2}\right)^2 \sin^2(\omega t) \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{E}_e \rangle = \frac{I_0^2 \ell}{4\pi\varepsilon_0 a^2 \omega^2}$$

De même pour la densité d'énergie magnétique, et l'énergie magnétique moyenne stockée (attention, l'intégrale sur le volume est plus compliquée, puisque B dépend de r)

$$w_m = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I_0 r}{2\pi a^2}\right)^2 \cos^2(\omega t) \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{E}_m \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 \ell}{32\pi}$$

On en déduit le rapport des énergies électriques et magnétiques

$$\alpha = \frac{\langle \mathcal{E}_m \rangle}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} = \frac{a^2\omega^2}{8\,c^2}$$

Condensateur : puissance rayonnée ?

On reprend l'expression des champs obtenus précédemment :

$$\vec{E}(t) = \frac{I_0}{\omega\pi a^2\varepsilon_0} sin(\omega t)\vec{u_z} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}\cos(\omega t)\vec{u_\theta}$$

On calcule le vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = -\frac{I_0^2 r}{2\pi^2 a^4 \varepsilon_0 \omega}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\vec{u_r}$

La puissance qu'il rayonne est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale du condensateur :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \int_{S_{\text{lat}}} \vec{\Pi}(r=a,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$$

On obtient $\mathcal{P}_{ray} = \frac{I_0^2 \ell}{\pi a^3 \epsilon_0 \omega}\cos(\omega t)\sin(\omega t)$

En moyenne cette puissance est nulle…