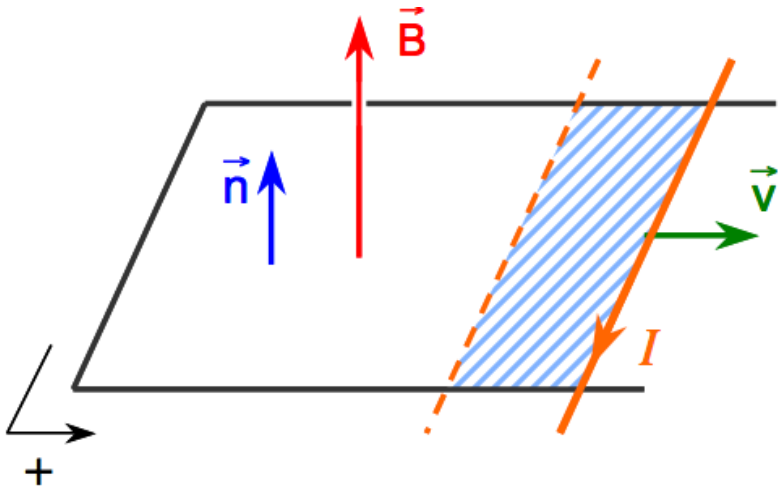
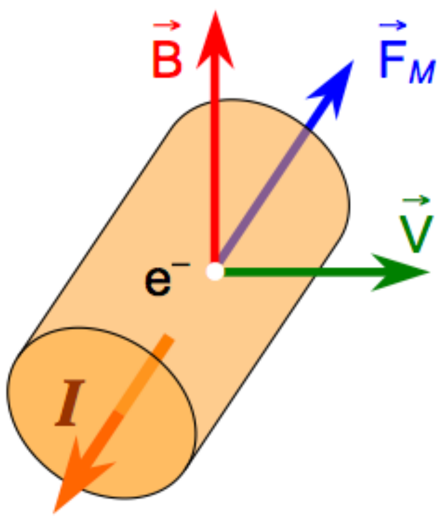
Retour sur le rail de Laplace





On met en mouvement une barre métallique dans un champ B uniforme

Un courant I circule dans le circuit.

En effet :

Les électrons libres dans le conducteur sont soumis à une force

$$\vec{F}_M = q\,\vec{V} \wedge \vec{B}$$

Qui les met en mouvement.

Dans le référentiel se déplaçant à la vitesse V, il existe donc une force de nature électrique, qui met en mouvement les charges

Transformation du champ par changement de repère galiléen

Soit un référentiel R' en mouvement par rapport à R avec une vitesse V.

L'expression de la force (ou de l'accélération) doit être invariante par changement de référentiel inertiel. Exprimons l'égalité de la force de Lorentz dans les deux référentiels :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}' = q\left(\overrightarrow{\mathrm{E}'} + \overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}'}\right) = \overrightarrow{\mathrm{F}} = q\left(\overrightarrow{\mathrm{E}} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}\right)$$

Puis la loi de composition galiléenne des vitesses : $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{\mathrm{V}}$

On en tire $\overrightarrow{\mathrm{E}'} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}'} - \overrightarrow{\mathrm{V}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}'} = \overrightarrow{\mathrm{E}} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$

Qui doit être vraie pour toute vitesse v. On en déduit **la transformation du champ électromagnétique par changement de repère Galiléen** :

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathrm{B}'} = \overrightarrow{\mathrm{B}} \\ \overrightarrow{\mathrm{E}'} = \overrightarrow{\mathrm{E}} + \overrightarrow{\mathrm{V}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}} \end{array}}$$

Le champ électromoteur

Une conséquence physique est donc que si on déplace un conducteur avec une vitesse V dans un champ magnétique B, les électrons de ce conducteur verront un champ électrique

$$\boxed{\overrightarrow{E_m} = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}}$$

Ce champ est dit ***champ électromoteur***. Contrairement au champ électrostatique, ce champ n'est pas à circulation nulle sur un circuit fermé

$$\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{d\ell} \neq 0$$

Et son rotationnel est donc non-nul (il ne dérive pas d'un potentiel scalaire).

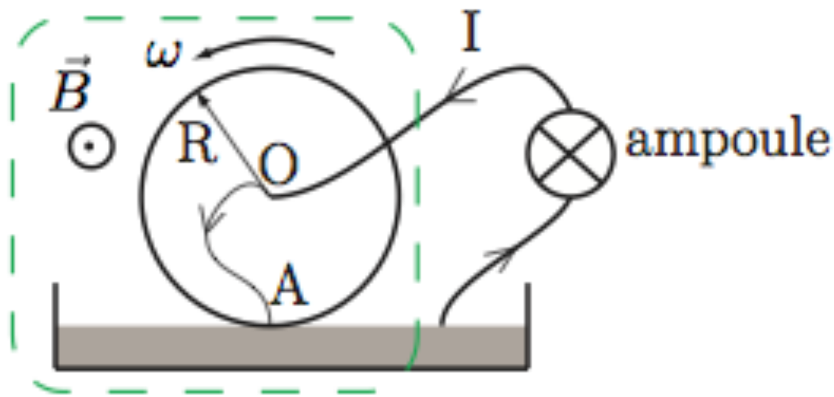
On définit la ***force électromotrice (f.e.m)*** d'un circuit mobile plongé dans un champ magnétique comme la circulation du champ électromoteur sur ce circuit

$$\boxed{e(t) = \int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{d\ell}}$$

$$e(t) = \oint_{\mathscr{C}} (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Cette f.e.m est homogène à une tension (Volts). On peut la modéliser comme un générateur dans le circuit.

Roue de Barlow « inverse »



On fait tourner le disque à la main avec une pulsation ω : l'ampoule s'allume !

Calculons la f.e.m dans le circuit :

$$e = \int_{O}^{A} \left(\vec{V} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{d\ell}$$

La vitesse d'un point M du disque vaut $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$.

Le produit vaut $\left(\vec{\omega} \wedge \vec{OM}\right) \wedge \vec{B} = \vec{OM}\left(\vec{B} \cdot \vec{\omega}\right) - \vec{\omega}\left(\vec{B} \cdot \vec{OM}\right)$

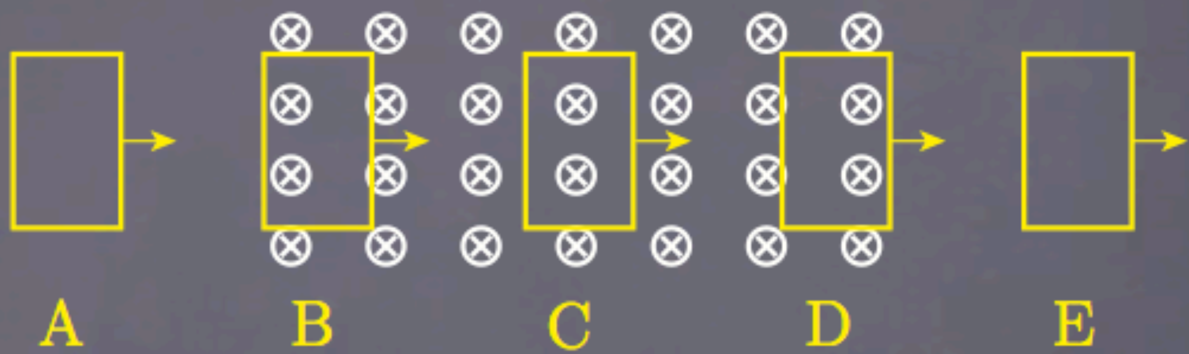
Et donc $e = \int_{O}^{A} \left(\vec{B} \cdot \vec{\omega}\right) \vec{OM} \cdot \vec{dOM} = \frac{1}{2} R^2 B \omega$

Le courant induit circule de O vers A (sens de V ∧ B). Quelle est la direction des forces de Laplace ?

C'est un résultat général, qui sera énoncé comme **la Loi de Lenz**

Induction de Lorentz

On considère une spire rectangulaire se déplaçant à vitesse constante de la gauche vers la droite dans la zone de champ magnétique représentée ci-dessous.



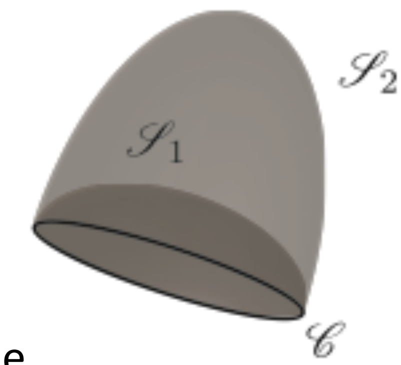
Entre quelle(s) position(s) consécutive(s) l'amplitude du courant dans la spire reste-elle constant ?

1. Entre A et B ainsi qu'entre D et E
2. Entre B et C ainsi qu'entre C et D
3. Entre C et D seulement
4. Aucune de ces réponses

Un circuit fixe dans un champ variable

On vient de voir qu'un circuit mobile dans un champ magnétique constant dans le temps mais pas dans l'espace produit un effet physique observable à travers la f.e.m. Si on se place dans un référentiel dans lequel le circuit est au repos, une variation temporelle du champ magnétique vu par le circuit doit aussi produire une f.e.m.

Cet effet est décrit par une nouvelle équation du champ, dite équation de Maxwell-Faraday. Sous forme intégrale, elle s'écrit :



$$\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\iint_{\mathscr{S}} \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

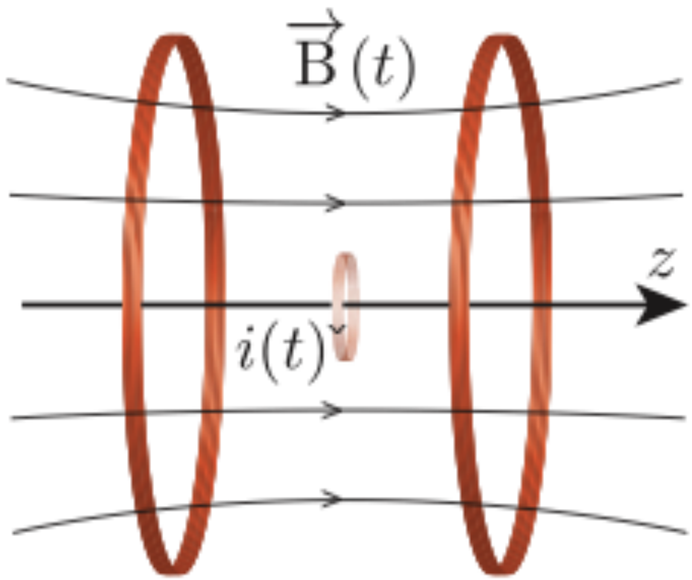
L'utilisation du théorème de Stokes nous en donne une forme locale,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

Dans le cas du conducteur en mouvement (induction motionelle), on parle d'induction de Lorentz, tandis que dans ce cas, on parle parfois d'induction de Van Neumann

On va voir que les deux cas se résument dans un seule équation, dite **équation de Faraday.**

Induction dans des bobines de Helmoltz



Comme vous l'avez vu pendant le TP2, des bobines de Helmoltz (qui produisent un champ uniforme) parcourue par un courant alternatif sont à l'origine d'une f.e.m induite dans la petite bobine au centre.

$$\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\vec{e_z}$$

On est dans un cas d'induction de Van Neumann, la f.e.m est donnée par

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\iint_{\mathscr{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

Et donc $e(t) = \pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t)$

Champ électrique et potentiels

L'équation de Maxwell-Faraday reste valable en présence d'une distribution statique de charge, en effet cette distribution est à l'origine d'un champ électrostatique dérivant d'un potentiel V, et donc

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{\mathrm{rot}}(-\vec{\mathrm{grad}}V + \vec{E_m}) = \vec{\mathrm{rot}}\vec{E_m} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Autrement dit, le champ électrique, dans ses composantes statiques et dynamiques, s'écrit en toute généralité en fonction des potentiels scalaire et vecteur comme

$$\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On voit ainsi, comme mentionné précédemment, que l'équation de Poisson vue en électrostatique n'est valable que dans la jauge de Coulomb,

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0$$

Dans une autre jauge, il faut modifier l'équation liant potentiel scalaire et densité volumique de charge

Loi de Faraday

On a vu dans les parties précédentes que la f.e.m s'écrit dans le cas général (mouvement du circuit + variation temporelle de B) (on peut remarquer que q*e est donc la circulation de la force de Lorentz sur le circuit considéré):

$$e(t) = -\iint_{\mathscr{S}} \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} + \oint_{\mathscr{C}} \left(\overrightarrow{\mathrm{V}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

Ce résultat peut se résumer en une seule équation, reliant l'induction d'une f.e.m dans un circuit à toute variation temporelle du flux magnétique à travers ce circuit quelle que soit l'origine de cette variation (déplacement du circuit, variation temporelle de B, déformation du circuit dans le temps…).

$$\boxed{e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$$

Attention, le sens choisi pour l'orientation de la surface S à travers on calcule le flux détermine, selon la règle de la main droite, le sens algébrique de la fem.

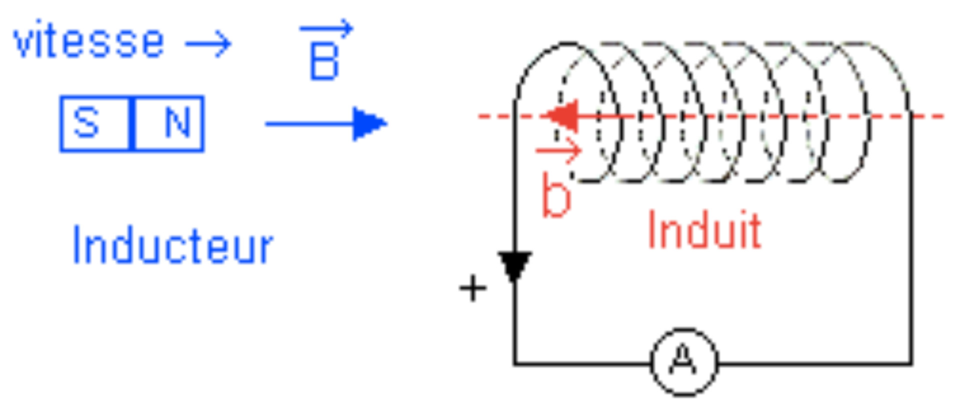
La surface S à travers laquelle on calcule le flux doit s'appuyer sur le contour S du circuit. Toute surface vérifiant cette propriété est équivalente, puisque div B = 0

Loi de Lenz

Loi de Lenz

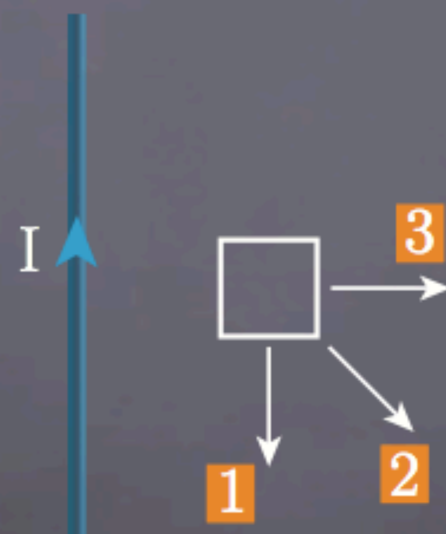
Si le flux Φ, calculé avec une convention de sens de e, a tendance à augmenter, alors $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} > 0$ et $e < 0$. Un courant « négatif » (par rapport à la convention de e) va circuler et créer un champ $\overrightarrow{B}$ qui tend à faire diminuer le flux Φ. Il s'agit d'une loi de modération qui dit que de façon générale, **la fem induite s'oppose toujours aux causes qui lui ont donné naissance**. On l'avait déjà constaté explicitement dans les exemples précédents.

Exemple :



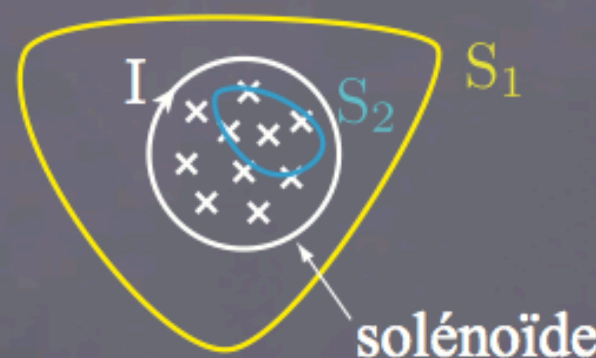
Loi de Faraday

On déplace une spire carrée au voisinage d'un fil parcouru par un courant *I*. Parmi les possibilités représentées sur la figure ci-dessous, choisir celle(s) pour la(les)quelle(s) il n'apparaît **PAS** de courant induit dans la spire carré.



Loi de Faraday

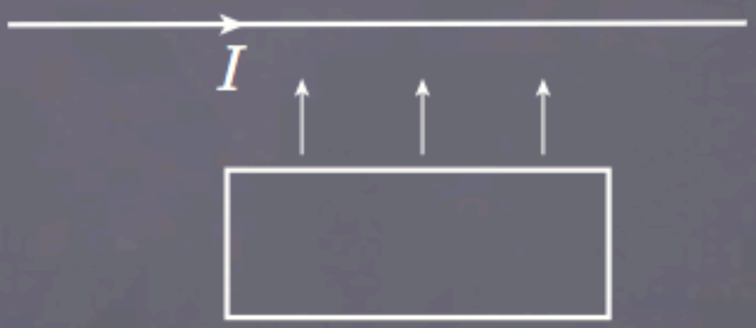
On considère un solénoïde parcouru par un courant I croissant dans le temps. Que peut-on dire au niveau des spires S_1 et S_2 ?



1. Un courant induit apparaît dans S_1 mais pas dans S_2
2. Un courant induit apparaît dans S_2 mais pas dans S_1
3. Un courant induit apparaît dans S_1 et dans S_2
4. Aucun courant induit n'apparaît, ni dans S_1 ni dans S_2

Loi de Lenz

Un fil infini est parcouru par un courant constant I. Une spire rectangulaire telle que représentée sur la figure ci-dessous, est déplacée en direction du fil.

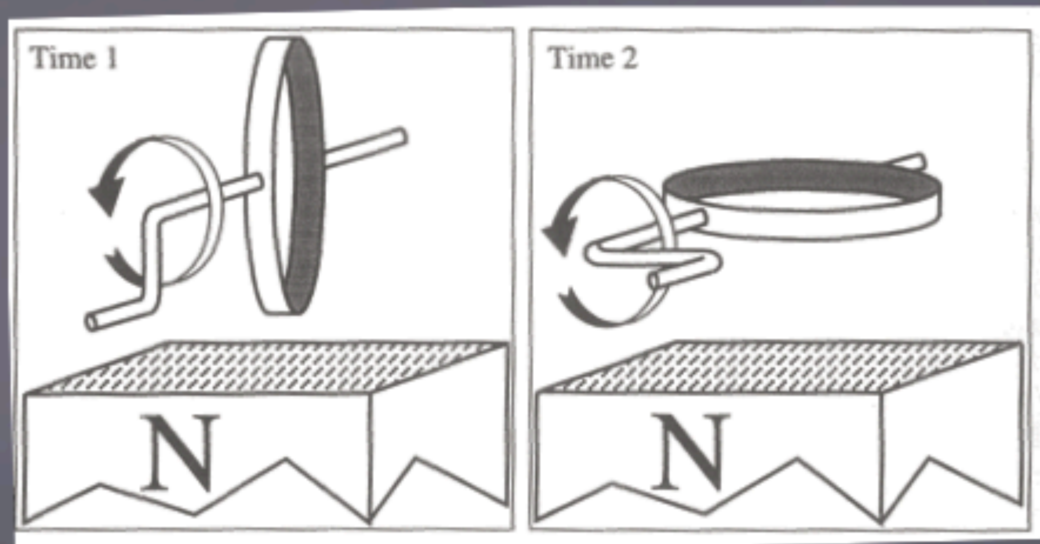


Quelle est la direction du courant induit dans la spire ?

1. Dans le sens des aiguilles d'une montre
2. Dans le sens inverse des aiguilles d'une montre
3. Il n'y a pas de courant induit

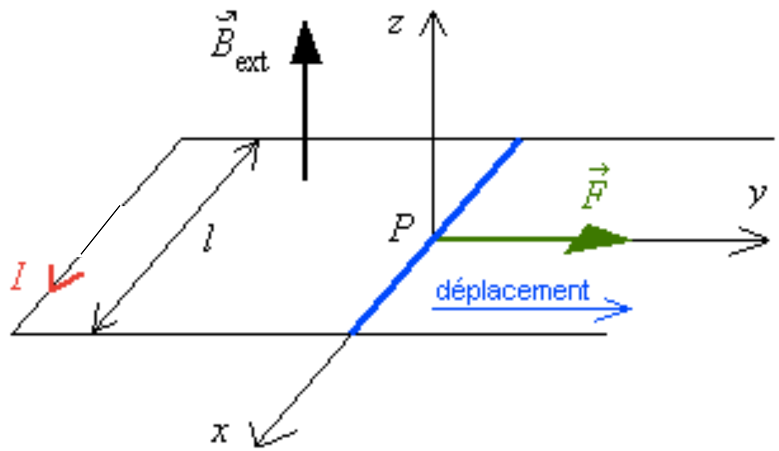
Loi de Faraday

Une spire est mise en rotation uniforme autour d'un axe horizontal au dessus du pole d'un aimant.



1. Le courant induit est nul dans la situation 1
2. Le courant induit est nul dans la situation 2
3. Le courant induit est toujours nul
4. Le courant induit n'est jamais nul

Retour sur le rail de Laplace



1) **<u>Equation dynamique</u>** : Force de Laplace sur le rail mobile

$$\vec{F_L} = IB\ell\vec{e_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{IB\ell}{m}$$

2) **<u>Loi de Faraday</u>** : la surface du circuit fermé (S=yl) varie avec le temps, on a donc une variation temporelle du flux, et donc une f.e.m induite dans le circuit

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell\frac{dy}{dt} = -B\ell v_y$$

3) **<u>Electrocinétique</u>**

(R est la résistance équivalente du circuit) : $I = \dfrac{e}{R} = -\dfrac{B\ell v_y}{R}$

4) **<u>Retour sur l'équation du mouvement</u> :**

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{B^2\ell^2}{mR}v_y = 0 \quad \Rightarrow$$

Loi de Lenz vérifiée

(principe du freinage par induction)

Rail de Laplace : aspects énergétiques

On a l'expression suivante de la vitesse de la barre : $v_y(t) = v_0 e^{-t/\tau}$

Où passe l'énergie ?

On calcule la dérivée temporelle de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = m v_y \frac{dv_y}{dt} = -\frac{B^2 \ell^2}{R} v_y^2 = -RI(t)^2$$

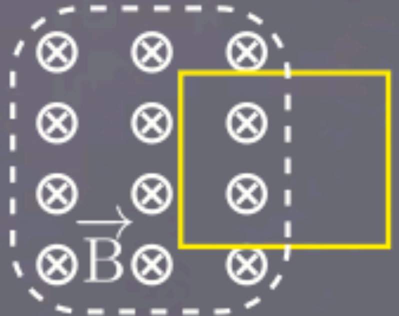
Elle est dissipée par effet Joule dans la résistance !

De manière équivalent, on peut vérifier facilement que l'énergie dissipée tout au long du mouvement par effet Joule vaut :

$$E_{Joule} = \int_0^{\infty} RI(t)^2 dt = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Induction et forces de Laplace

Une spire rectangulaire est à cheval sur une zone de champ magnétique. On suppose que l'amplitude du champ magnétique se met soudainement à augmenter. Que se passe-t-il au niveau de la spire ?



1. La spire est poussée vers le haut
2. La spire est poussée vers le bas
3. La spire est poussée vers la gauche, dans la zone de champ magnétique
4. La spire est poussée vers la droite, en dehors de la zone de champ magnétique
5. Le courant induit augmente mais la spire ne bouge pas

UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

Phénomène d'auto-induction

Un circuit parcouru par un courant génère un champ B. Si ce courant est alternatif, le champ B va varier dans le temps, ainsi donc que le flux du champ crée par le circuit à travers lui-même : une f.e.m va apparaître dans le circuit.

D'après la formule de Biot et Savard, ce flux s'écrit

$$\phi = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = \iint_{\mathscr{S}} \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint \frac{i(t)\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{\mathrm{PM}}}{\mathrm{PM}^3} \right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = \left[\iint_{\mathscr{S}} \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{\mathrm{PM}}}{\mathrm{PM}^3} \right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} \right] i(t)$$

Le terme entre crochets **ne dépend que de la géométrie du circuit et est toujours positif**. **On l'appelle coefficient d'auto-induction, ou encore inductance, du circuit**. On la note généralement L, et son unité est le Henry (H). Par définition de L, on a donc

$$\boxed{\phi(t) \equiv \mathrm{L}i(t)}$$

Où ϕ(t) est le flux auto-induit à travers le circuit qui est traversé par le courant i(t).

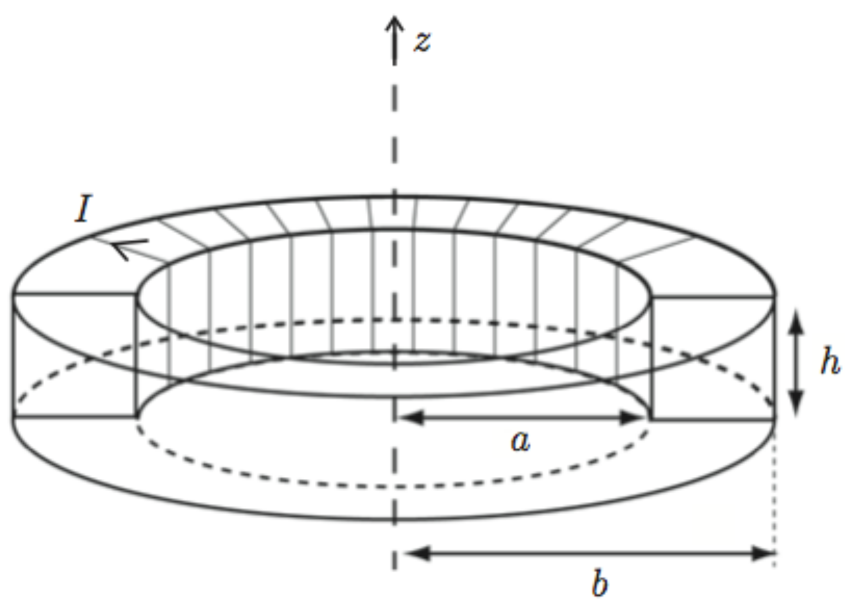
Inductance d'un solénoïde torique (TD 11)

On peut calculer à l'aide du théorème d'Ampère le champ magnétique crée par un solénoïde torique. On obtient

$$\overrightarrow{\mathrm{B}}_{\mathrm{int}} = \frac{\mu_0 \mathrm{N} i}{2\pi r} \overrightarrow{e_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{B}}_{\mathrm{ext}} = \overrightarrow{0}$$

Le flux ϕ_1 de B à travers une spire du solénoïde vaut donc (on considère des spires rectangulaires ici pour plus de simplicité)

$$\phi_1 = \frac{\mu_0 \mathrm{N} i h}{2\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 \mathrm{N} i h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



Et le flux total à travers les N spires vaut $\mathrm{N}\phi_1$, donc :

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{N}\phi_1}{i} = \frac{\mu_0 \mathrm{N}^2}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

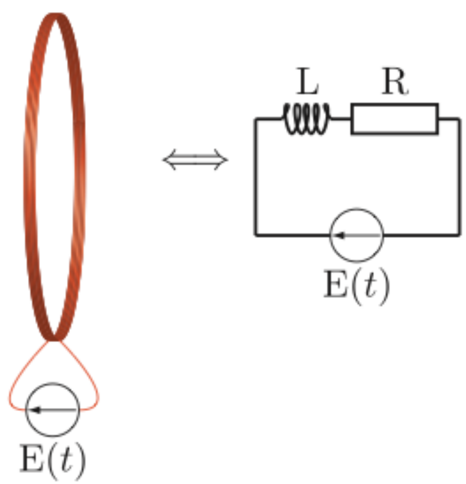
Force électromotrice et courants auto-induits

D'après la loi de Faraday, si le flux magnétique à travers un circuit est variable, ce circuit est le siège d'une f.e.m. Dans le cas de l'auto-induction, on a donc

$$\boxed{e(t) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

Si l'impédence équivalente du circuit est une simple résistance R, le courant qui apparaît dans le courant vaut simplement

$$i_{\mathrm{induit}}(t) = \frac{e(t)}{\mathrm{R}} = -\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



Circuit équivalent d'une bobine alimentée par un générateur de tension alternatif.

Inductance mutuelle

On peut définir l'inductance mutuelle de deux circuits filiformes C_1 et C_2 par la relation

$$L_{12} = \frac{\phi_{12}}{i_2}$$

Où ϕ_{12} est le flux du champ B_2 (crée par le courant i_2 traversant le circuit C_2) à travers le circuit C_1.

On montre que $L_{12} = L_{21} = M$ (formule de Neumann). **M est appelé coefficient d'inductance mutuelle des circuits C_1 et C_2**. Il ne dépend que de la géométrie du système formé par les deux circuits. Il peut être positif ou négatif.

M vérifie l'inégalité $|M| \leqslant \sqrt{L_1 L_2}$

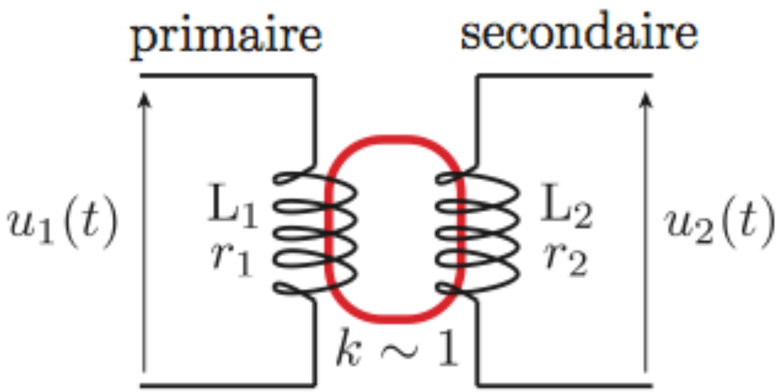
On peut ainsi définir le coefficient de couplage k entre deux circuits par

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leqslant 1.$$

Si k est proche de 1, les deux circuits sont fortement couplés (**le flux traversant la surface du circuit est le même pour les 2 circuits**). Au contraire si $k \approx 0$, les deux circuits se comportent indépendamment l'un de l'autre.

Transformateur électrique (simple)

On réalise un couplage maximal (k≈1) entre deux enroulements. L'un appelé primaire (circuit 1), l'autre secondaire (circuit 2).



Puisque k=1, le flux ϕ_0 traversant la surface d'une spire du circuit 1 et du circuit 2 est le même.

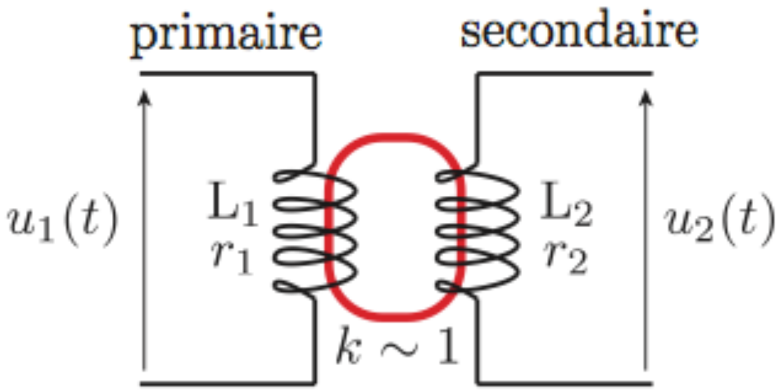
Le flux dans le circuit 1 (composé de N_1 spires) est donc $\phi_1=N_1\phi_0$, et pour le circuit 2, $\phi_2=N_2\phi_0$

On en déduit que $$\frac{u_2}{u_1} = \frac{d\phi_2/dt}{d\phi_1/dt} = \frac{N_2}{N_1}$$

En l'absence de perte de puissance : $u_2 i_2 = u_1 i_1$ et donc $\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}$

Transformateur électrique (plus général)

On réalise un couplage maximal (k≈1) entre deux enroulements. L'un appelé primaire (circuit 1), l'autre secondaire (circuit 2).



La loi des mailles dans chaque enroulement s'exprime (on néglige les résistances internes) :

$$u_1(t) \simeq \frac{d\phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) \simeq \frac{d\phi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

On en tire : $\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1}\left(u_1 - M\frac{di_2}{dt}\right) = \frac{1}{M}\left(u_2 - L_2\frac{di_2}{dt}\right)$

Et donc : $u_2 = \frac{M}{L_1} u_1 + \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1}\right)\frac{di_2}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \propto \frac{N_2}{N_1}$$

Applications : Essentiel pour la distribution de l'électricité (tension élevée à 400 kV dans les lignes hautes tensions), four à induction, …