Ondes électromagnétiques dans le vide

En l'absence de sources (densité volumique de charge ou de courant), on a vu que les champs électriques et magnétiques étaient solution de l'équation de d'Alembert :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

En se plaçant dans la jauge de Lorenz, les potentiels scalaires et vecteurs sont eux aussi solution de cette équation

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta}\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

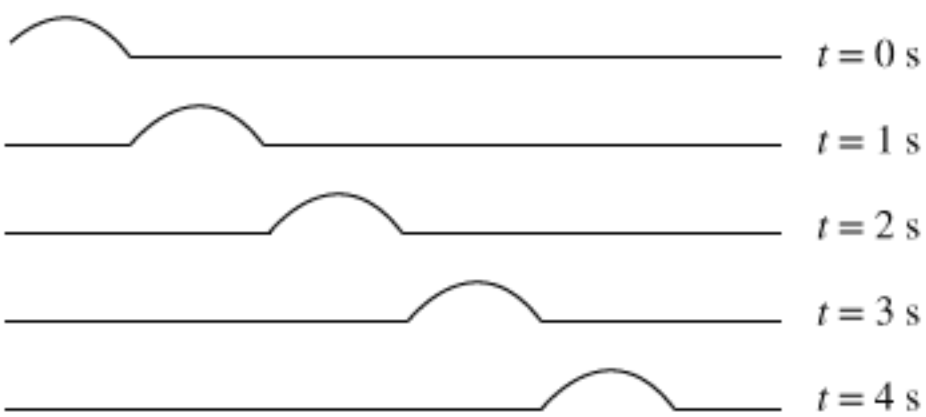
Ondes progressives

La solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle s'écrit de manière générale

$$\psi(x,t) = F(t - x/c) + G(t + x/c)$$

Dans cette équation, on appelle x/c le *retard de phase*. L'ensemble des points ayant la même phase à t donné (donc ayant le même retard de phase) est appelé *surface d'onde. Cette notion prend évidemment son sens dans le cas tridimensionnel.* Par exemple dans le cas d'une *onde plane*, on a :

$$\psi(\vec{r},t) = F(t - \vec{r}\cdot\vec{u}/c) + G(t + \vec{r}\cdot\vec{u}/c)$$



Interprétation : propagation sans déformation d'un signal avec une vitesse c, vers la droite (signal F) et vers la gauche signal (G).

Opérateur nabla pour une onde plane progressive

On appelle onde progressive (OPP) une solution de l'équation de d'Alembert se propageant à la vitesse c dans une direction u donnée avec un sens sonné (soit F, soit G, dans l'exemple précédent).

Ces solutions s'écrivent (f scalaire, A vecteur) : $f(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c})$ ou $\vec{A}(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c})$

On peut donc écrire les dérivée par rapport au temps ou à l'espace :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = f'(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c})$$

et $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{u_x}{c} f'(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c})$$ (de même pour les autres composantes)

On en déduit la forme de l'opérateur nabla pour des fonctions d'ondes planes progressives :

$$\vec{\nabla} = -\frac{\vec{u}}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

Structure de l'onde plane progressive (OPP)

D'après la forme de l'opérateur nabla, on déduit facilement la forme des opérateurs vectoriels pour des fonctions d'ondes planes progressives :

$$\overrightarrow{grad}\, f = -\frac{\vec{u}}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \qquad div\vec{A} = -\frac{\vec{u}}{c}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{A} = -\frac{\vec{u}}{c}\wedge\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Les équations de Maxwell en l'absence de charge imposent donc des propriétés « structurelles » pour les OPP dans le vide :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u}\cdot\vec{E} = 0 \\ \vec{u}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \dfrac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c} \\ \vec{E} = -c\left(\vec{u}\wedge\vec{B}\right) \end{array}}$$

Dans une onde plane progressive, E et B sont perpendiculaires entre eux en tout point.

Ils sont aussi perpendiculaires à la direction de propagation u, de sorte que E,B,u forme un trièdre direct : on dit que l'onde plane est *transverse*.

Onde progressive plane sinusoïdale (OPPM)

On considère maintenant une classe particulière d'OPP, variant dans le temps de manière sinusoïdale avec une pulsation ω

$$\psi(\vec{r},t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right) + \varphi\right] = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi\right)$$

On appelle φ le déphasage de l'onde. C'est une valeur relative (déphasage par rapport à un choix d'origine des temps).

On voit qu'à t donné, la variation spatiale de cette onde est aussi sinusoïdale, on définit le vecteur d'onde k :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$$

Variation temporelle en un point r :

- ω la pulsation de l'onde
- f=ω/2π la fréquence de l'onde
- T=1/f=2π/ω la période de l'onde

Variation spatiale à un instant t :

- k le vecteur d'onde
- n=k/2π le nombre d'onde
- λ=1/n=2π/k la longueur d'onde

Onde progressive plane sinusoïdale (OPPM)

On peut introduire la notation complexe, plus pratique vu que les équations de Maxwell sont linéaires :

$$\underline{\psi}(\vec{r},t) = \underline{A}e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)}$$

Où on a introduit l'amplitude complexe $\underline{A} = Ae^{-i\varphi}$

Les opérations de dérivations s'écrivent, appliquées à ψ, de manière simple :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}} \rightarrow i\vec{k} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}} \rightarrow i\vec{k}\wedge \qquad \mathrm{div} \rightarrow i\vec{k}\cdot$$

La structure de l'OPPM est donnée par les équations de Maxwell :

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \\ &\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \\ &\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} \\ &\vec{E} = c^2\frac{\vec{B}\wedge\vec{k}}{\omega} \end{aligned}}$$

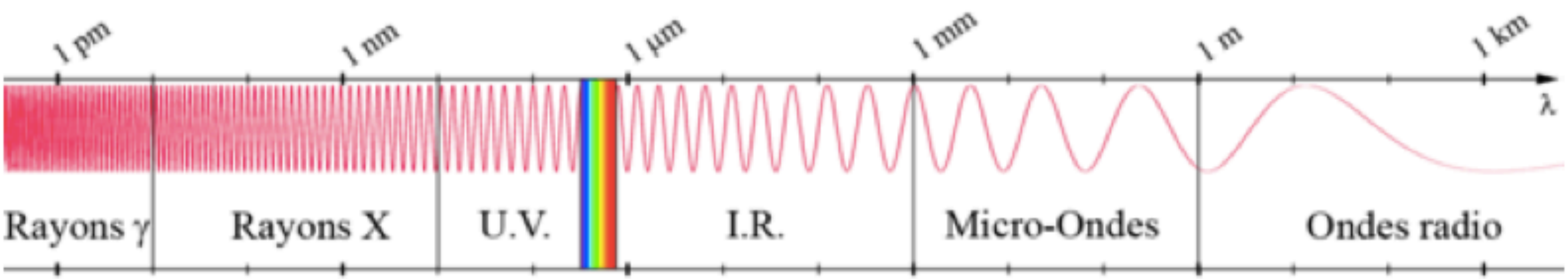
On retrouve la structure de l'OPP, avec une information supplémentaire : les champs E et B sont en phase.

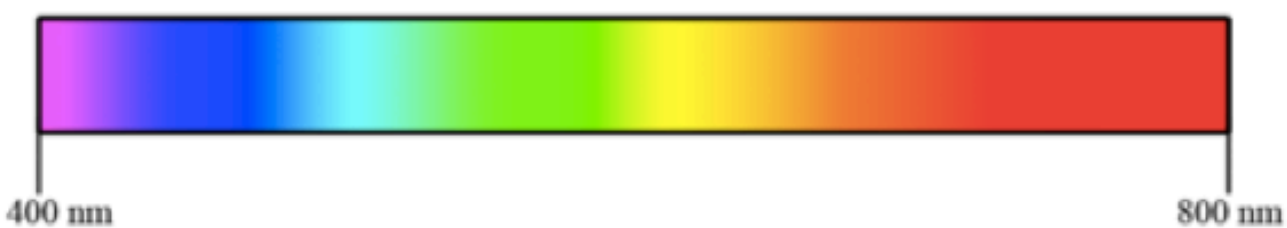
Pourquoi une décomposition en OPPM ?

1) Les équations de Maxwell sont linéaires

2) Tout signal périodique est décomposable en une somme d'OPPM

3) Pour connaître l'évolution d'un signal quelconque, il suffit donc de connaître sa composition spectrale, et l'évolution d'une OPPM (comme on vient de le voir relativement simple à traiter)





Polarisation d'une OPPM

On considère le cas d'une propagation selon u_x . Le vecteur E est dans le plan (y,z). On ne traite pas le vecteur B, puisqu'on peut le déduire directement de E via les relations de structure de l'OPP.

Dans le cas le plus général, les solutions en OPPM pour les deux composantes de E s'écrivent :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{pmatrix}$$

Dans un plan d'onde (x = cste), le vecteur E décrit une ellipse, qui peut éventuellement être dégénérée :

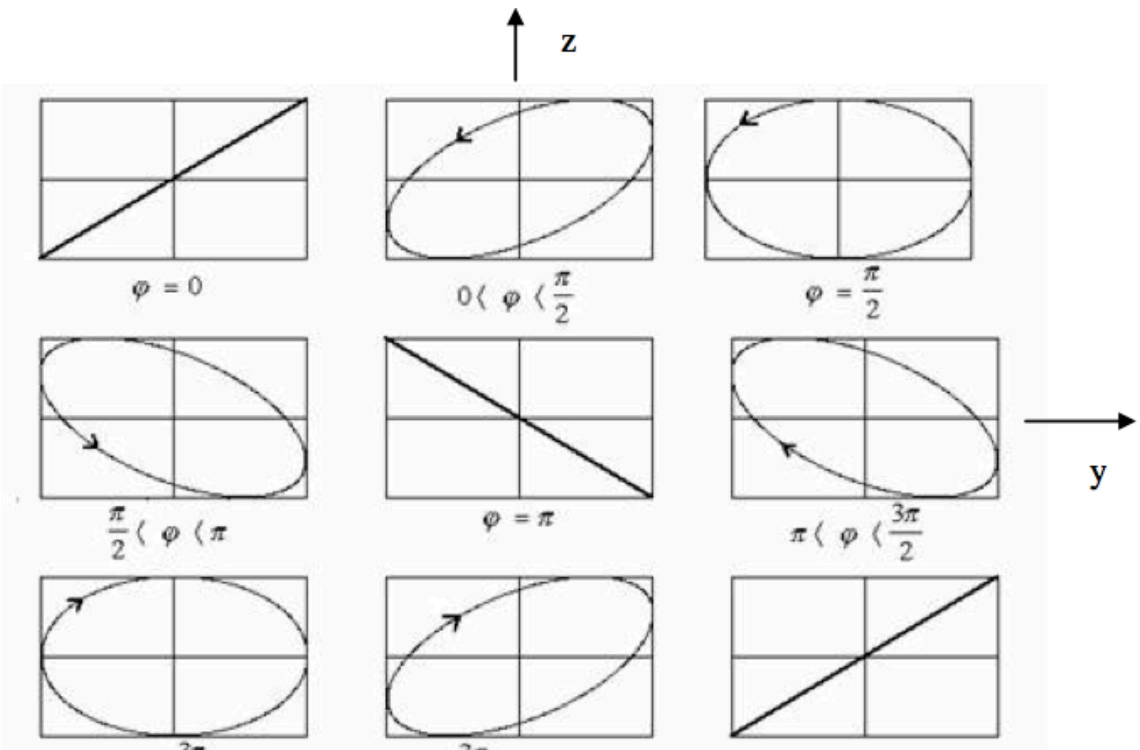


Figure 29

φ est défini comme
$\varphi = \varphi_y - \varphi_z$

Onde sphérique

On cherche une solution à symétrie sphérique de l'équation de d'Alembert, sous la forme

$$f(r,t) = \frac{g(r,t)}{r}$$

Le Laplacien de f s'écrit en coordonnées sphériques : $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})$

Qui s'écrit en fonction de g : $\Delta f(r,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$

Et l'équation de d'Alembert se réduit à une équation de propagation à une dimension pour g (en dehors de la singularité en r=0) :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$$

La fonction g admet donc une solution en ondes progressives, et f s'écrit sous la forme :

$$f(r,t) = \frac{F(t - r/c) + G(t + r/c)}{r}$$

Superposition d'ondes sphériques entrantes et sortantes.

Energie transportée par les ondes électromagnétiques

On a introduit précédemment le vecteur de Poynting comme une *« densité de courant d'énergie ».* Il détermine l'énergie qui est transportée par le champ. On a pour des ondes planes monochromatiques :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u} = \frac{cB^2}{\mu_0} \vec{u}$$

La densité d'énergie électromagnétique dans une onde est

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

(on peut remarquer que dans une OPP, l'énergie est également partagée entre sa composante électrique et magnétique)

On voit donc bien l'analogie entre le vecteur $j = \rho v_e$, qui est une densité volumique de « courant de charge » et le vecteur de Poynting $\Pi = wc$, qui est une densité volumique de « courant d'énergie », l'énergie se déplaçant ici à la vitesse c.

On définit l'intensité lumineuse comme la moyenne temporelle de Π

Notion d'intensité lumineuse

Le vecteur de Poynting détermine ainsi la quantité d'énergie qui est transportée par les ondes électromagnétiques (donc les ondes lumineuses). On définit généralement l'intensité d'une source lumineuse comme

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u} = \frac{cB^2}{\mu_0} \vec{u}$$

La densité d'énergie électromagnétique dans une onde est

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

(on peut remarquer que dans une OPP, l'énergie est également partagée entre sa composante électrique et magnétique)

On voit donc bien l'analogie entre le vecteur j = ρv_e , qui est une densité volumique de « courant de charge » et le vecteur de Poynting Π = wc, qui est une densité volumique de « courant d'énergie », l'énergie se déplaçant ici à la vitesse c.