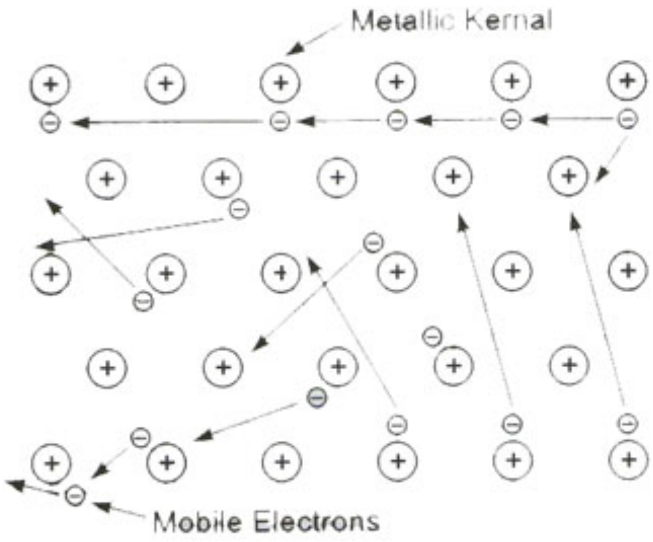
Mouvement des charges dans un conducteur, conduction du courant

Mouvement thermique des électrons libres dans un conducteur :

$$v_T = \sqrt{3k_B T/m_e} \sim 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

La moyenne de cette vitesse est **vectoriellement** nulle car les collisions (interactions) avec la structure cristalline du métal répartissent aléatoirement la direction du vecteur vitesse de chaque particule.

=> Le mouvement thermique ne transporte pas de charge en moyenne. Il ne produit pas de *courant*.



Cependant l'application d'un champ électrique dans un conducteur va générer un mouvement moyen des électrons libres dans celui-ci (qui n'est donc plus *à l'équilibre*)

Sous l'action du champ E, le gaz d'électron acquiert une vitesse moyenne v_e non-nulle

Courant et densité volumique de courant

On note ρ_e la densité volumique de charge des *électrons de conduction*. Pour le cuivre, qui est un très bon conducteur, on a typiquement

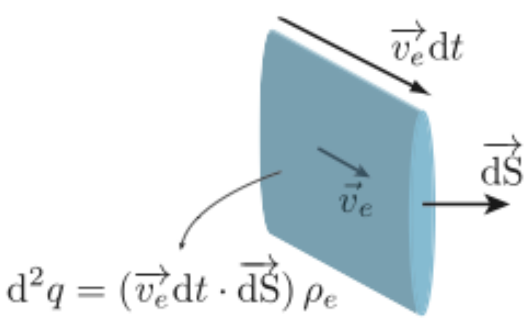
$$\rho_e = -n_e\, e \simeq -13,5 \times 10^9 \text{ C.m}^{-3}$$

Hors équilibre (en présence de champ électrique), ces électrons sont animés d'une vitesse d'ensemble v_e. On définit **la densité volumique** de courant comme :

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v_e} \qquad \text{(A.m}^{-2}\text{)}$$

Le courant I à travers une surface S (par exemple la section d'un fil conducteur) est défini comme la quantité de charge traversant cette surface par unité de temps :

$$\boxed{\mathrm{I} = \left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{S}}} \qquad \text{(A)}$$



$$d^2q = -en_e\vec{v_e}dt \cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I} = \iint_{\mathrm{S}} \vec{j} \cdot \vec{\mathrm{dS}}$$

Conservation de la charge, conservation du courant

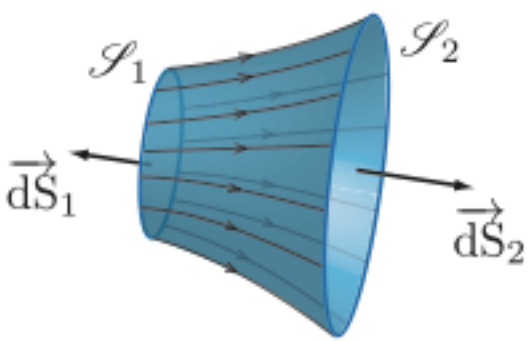
Le bilan de charge dans un volume V délimité par une surface fermée S s'écrit

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathscr{S}} \vec{\jmath} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathscr{V}} \rho d\tau$$

Ou encore, sous forme locale (en appliquant le théorème de Green-Ostogradsky) ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{\jmath} = 0$$

En régime stationnaire (d/dt = 0), cette propriété se traduit par la conservation du courant le long d'un *tube de courant* (généralement le tube = un fil électrique*) :*



$$0 = \oint\!\!\!\oint_{\mathscr{S}} \vec{\jmath} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = \iint_{\mathscr{S}_1} \vec{\jmath} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} + \iint_{\mathscr{S}_2} \vec{\jmath} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = -\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$$

$$\boxed{\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2}$$

La loi d'Ohm

Il existe une relation (valable dans l'approximation de champ E *pas trop grands*) entre le champ appliqué et la densité volumique de courant induite par ce champ

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{\mathrm{E}}}$$

γ est appelée conductivité du milieu. C'est une grandeur qui ne dépend que de la nature du conducteur. Elle se mesure en Siemens par mètre : S/m

On définit la **résistivité du milieu** (notée en général ρ) **comme l'inverse de γ**. Son unité est l'Ohm - mètre : Ω.m

Lien entre résistivité et « viscosité » (modèle de Drude, 1900) :

$$\frac{dv_e}{dt} = -\frac{eE}{m_e} - \nu_e v_e$$

Nécessaire pour « reproduire » (en reg. permanent) la proportionnalité observée entre v_e et E

On obtient : $\gamma = \dfrac{n_e e^2}{m_e \nu_e}$ (fonction de n_e mais aussi de T à travers ν_e)

Retour à l'équilibre d'un « conducteur » en l'absence de champ extérieur imposé

En combinant la conservation de la charge, la loi d'Ohm et l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{\jmath} = 0 \quad , \quad \vec{\jmath} = \gamma \vec{\mathrm{E}} \quad , \quad \mathrm{div}\ \vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0}\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$

L'ordre de gradeur de la conductivité dans différents milieux :

	Cu	Fe	verre	Polystyrène
γ ($\mathrm{S.m^{-1}}$)	58×10^6	$9,9 \times 10^6$	10^{-11}	10^{-20}

Ainsi, le temps de retour à l'équilibre d'un matériau sur lequel on a déposé de la charge peut varier entre 10^{-17}s pour le cuivre, à 10^9s (28 ans…) pour le polystyrène. Ce temps est d'environ 1s pour le verre.

On peut ainsi définir plus quantitativement la notion d'isolant ou de conducteur, en fonction des échelles de temps considérées dans un problème donné.

Courant

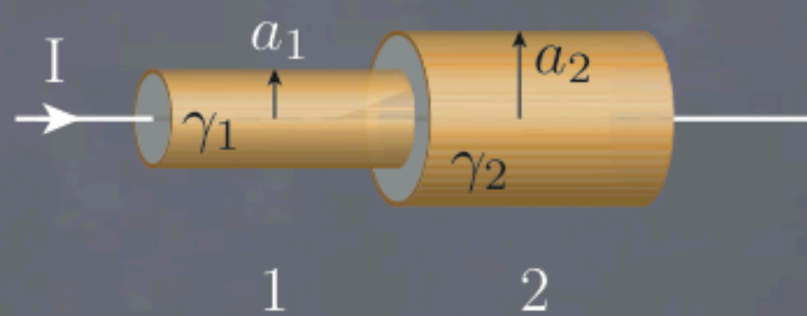
Un fil de cuivre de section 1 mm^2 est parcouru par un courant I = 1A.

Quelle est l'ordre de grandeur de la vitesse d'ensemble v_e des électrons dans le fil ?

A. 10 km/s
B. 100 m/s
C. 1 m/s
D. 1 cm/s
E. 0.1 mm/s

Courant

Deux conducteurs différents sont associés selon la géométrie ci-dessous. Les extrémités sont connectées à un générateur.

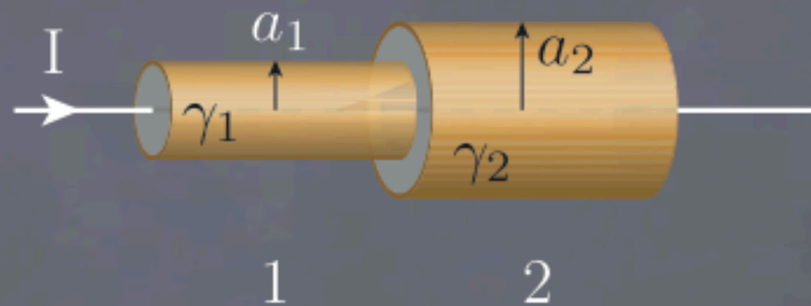


Quelle région est soumise au plus grand courant ?

1. Région 1.
2. Région 2.
3. Les deux.
4. Il n'y a pas assez d'informations pour conclure.

Densité volumique de courant

Deux conducteurs différents sont associés selon la géométrie ci-dessous. Les extrémités sont connectées à un générateur.

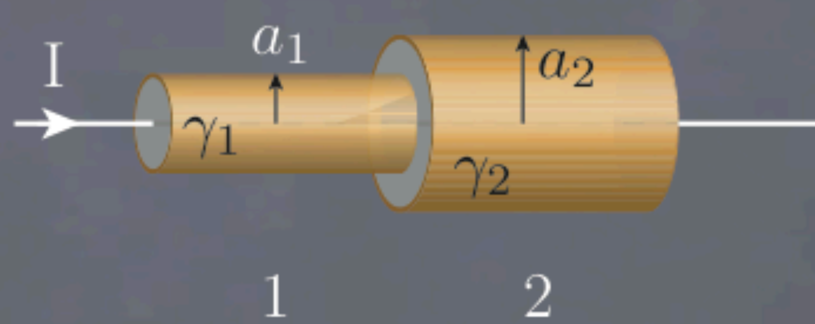


Quelle région est soumise à la plus grande densité volumique de courant ?

1. Région 1.
2. Région 2.
3. Les deux.
4. Il n'y a pas assez d'informations pour conclure.

Densité volumique de courant

Deux conducteurs différents sont associés selon la géométrie ci-dessous. Les extrémités sont connectées à un générateur.



Quelle région est soumise au plus grand champ électrique ?

1. Région 1.
2. Région 2.
3. Les deux.
4. Il n'y a pas assez d'informations pour conclure.

Notion de dipôle électrocinétique

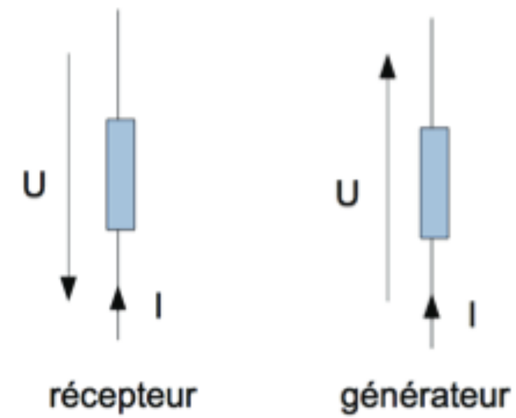
On définit un dipôle électrocinétique comme un tube de courant situé entre deux surfaces équipotentielles.

Soumis à une différence de potentiel U (qu'on nomme tension aux bornes du dipôle), il circulera dans le dipôle un courant I

$$\mathrm{U} = \int_1^2 \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \qquad \mathrm{I} = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

De manière conventionnelle, on oriente I et U soit :

- Dans le sens inverse : la convention est dite récepteur
- Dans le même sens : la convention est dite générateur



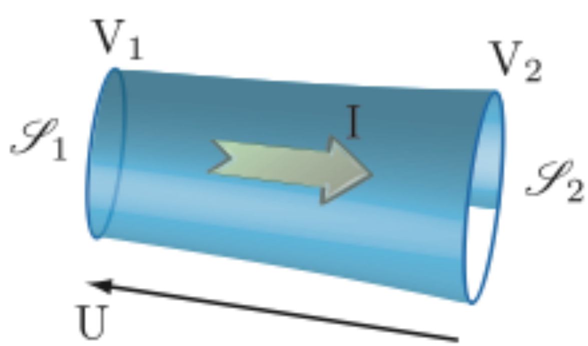


FIGURE 1 – Dipôle électrocinétique en convention récepteur.

Résistance

En vertu de la loi d'Ohm, l'intensité à travers une section de conducteur est proportionnelle au champ électrique E, donc à la tension U. On définit la résistance R d'une portion de conducteur comme

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{\displaystyle\int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{d\ell}}{\gamma \displaystyle\iint_{\mathscr{S}} \vec{E} \cdot \vec{dS}}}$$

R ne dépend que de la géométrie du conducteur. Son unité est le Ohm (Ω).

Pour le conducteur homogène cylindrique (où j est constant dans le volume), on trouve facilement :

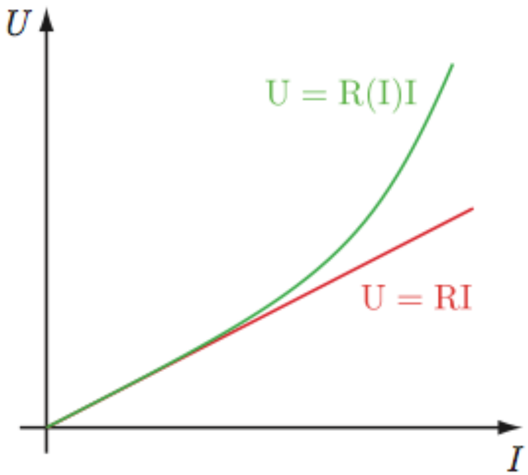
$$R = \frac{\ell}{\gamma S} = \frac{\rho \ell}{S}$$

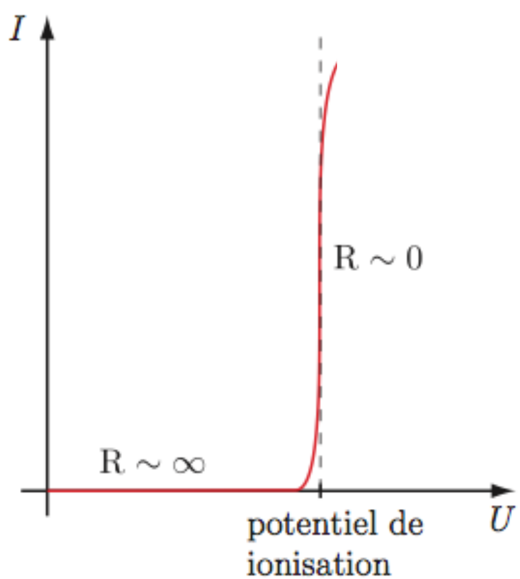
Aux bornes d'une résistance, en convention récepteur, on a donc par définition de R

$$U = RI$$

(relation parfois nommée *loi d'Ohm intégrale*)

Courbe caractéristique d'un dipôle électrocinétique





Courbe caractéristique d'un dipôle : I = f(U) ou U=f(I)

Aux bornes d'une résistance, la courbe U=f(I) est linéaire (loi d'Ohm)

Cependant la conductivité varie avec la température. Et plus le courant est important, plus la température du dipôle augmente (effet joule) ….

Caractéristique courant-tension d'un gaz entre deux électrodes. Au delà d'une tension (dite « de claquage ») le gaz devient conducteur.

Il devient « un plasma », un gaz ionisé, dans lequel existent une densité importante d'électrons libres.

Puissance dissipée dans un dipôle électrocinétique : effet Joule

Le travail élémentaire dW de la force électrique dF sur les charges dq contenues dans un petit volume dV vaut :

$$d^2W = d\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = d\vec{F} \cdot \vec{v_e} dt = dq\vec{E} \cdot \vec{v_e} dt = \rho_e d\tau \vec{v_e} \cdot \vec{E} dt$$

La puissance élémentaire dP cédée aux charges au sein du volume de conducteur vaut donc

$$d\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P} = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Dans un **circuit filiforme** (le vecteur j est le long du fil, tout comme dS) :

$$\mathcal{P} = \int_1^2 \mathrm{I}\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \cdot \overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{UI}$$

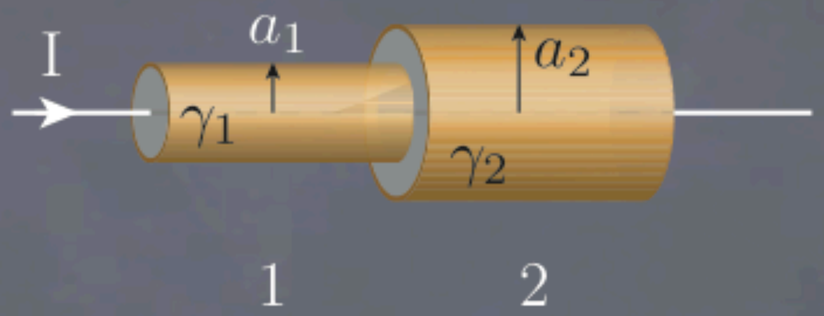
En régime permanent, la vitesse v_e des charges est constante : $\mathcal{P} + \mathcal{P}_J = 0$

$$\boxed{|\mathcal{P}_\mathrm{J}| = \mathrm{UI} = \mathrm{RI}^2 = \frac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{R}}}$$

Cette puissance est dissipée par échauffement du conducteur. Cet échauffement est dû aux interactions entre les électrons et les défauts du cristal. **C'est l'effet Joule**.

Loi d'Ohm

Deux conducteurs différents sont associés selon la géométrie ci-dessous. Les extrémités sont connectées à un générateur.



On suppose que le rapport des conductivités est $\gamma_2/\gamma_1 = 4$. Quel doit être le rapport des rayons a_2/a_1 pour que le champ électrique à l'intérieur des deux conducteurs soit identique ?

1. $1/2$
2. $1/4$
3. 1
4. 2
5. 4

Rappel sur les notations complexes

On considère maintenant un signal dépendant du temps. C'est à dire que la tension appliquée (ou le courant) n'est pas ***continu*** (indépendant du temps) mais ***alternatif***

On peut écrire un signal sinusoïdal sous la forme $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$

On définit la représentation complexe de s(t) par :

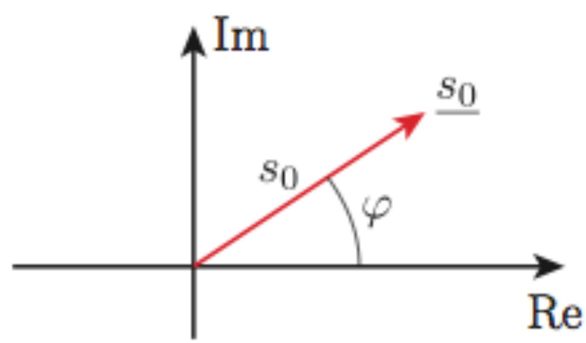
$$\underline{s}(t) = \underline{s_0}\, e^{j\omega t} \qquad \text{avec} \qquad \underline{s_0} = s_0\, e^{j\varphi}$$

Cette notation est pratique pour résoudre des équations différentielles linéaires, et en particulier trouver leur solution particulière (solution en *régime permanent*).

On revient au signal physique en prenant la partie réelle de la représentation complexe :

$$s(t) = \mathcal{R}e(\underline{s}(t))$$

$$s_0 = |\underline{s_0}| \quad \text{et} \quad \varphi = \mathrm{Arg}(\underline{s_0})$$



Impédance complexe

Par analogie avec la notion de résistance, on peut définir l'impédance complexe d'un dipôle électrocinétique aux bornes duquel est appliquée une tension sinusoïdale u de fréquence ω par

$$\boxed{\mathrm{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{\underline{u_\omega}}}{\underline{i_\omega}}}$$

On définit la résistance R et la réactance X par $\mathrm{Z}(\omega) = \mathrm{R}(\omega) + j\mathrm{X}(\omega)$

La **puissance moyenne** dissipée dans une impédance vaut

$$\mathrm{P} = \langle u(t)i(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{u}.\underline{i}^*) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\mathrm{Z})|\underline{i}|^2$$

Elle ne dépend donc que de la partie réelle (la résistance) du dipôle. La réactance n'intervient pas dans la dissipation.

L'impédance d'une résistance « pure », est purement réelle $\boxed{\mathrm{Z_R} = \mathrm{R}}$

<u>Conséquence :</u> la tension et l'intensité sont toujours en phase aux bornes d'une résistance

Le condensateur (*capacité*)

On a vu que la charge d'un condensateur de capacité C est reliée à la différence de potentiel U à ses bornes par la relation Q = C U

On peut donc exprimer facilement le lien entre intensité et tension aux bornes d'un condensateur :

$$\mathrm{I} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}t}$$

La valeur de son impédance complexe est donc $\boxed{\mathrm{Z_C} = \frac{1}{j\mathrm{C}\omega}}$

Puisque Re(Zc) = 0, la puissance moyenne dissipée dans le condensateur est nulle. L'énergie stockée en moyenne sous forme électrostatique, par contre, est non-nulle :

$$\mathcal{P} = \mathrm{UI} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathrm{CU}^2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathrm{CU}^2}$$

Symbole du condensateur :

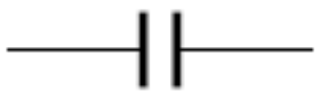


Photo d'un condensateur :

La bobine (*inductance*)

On a verra dans le cour sur l'induction qu'on peut exprimer le lien entre intensité et tension aux bornes d'une bobine d'inductance L par :

$$\mathrm{U} = \mathrm{L}\,\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{d}t}$$

La valeur de son impédance complexe Z_L est donc

$$\boxed{\mathrm{Z_L} = j\mathrm{L}\omega}$$

Puisque $\mathrm{Re}(Z_L) = 0$, la puissance moyenne dissipée dans la bobine est nulle. L'énergie stockée en moyenne sous forme magnétique , par contre, est non-nulle :

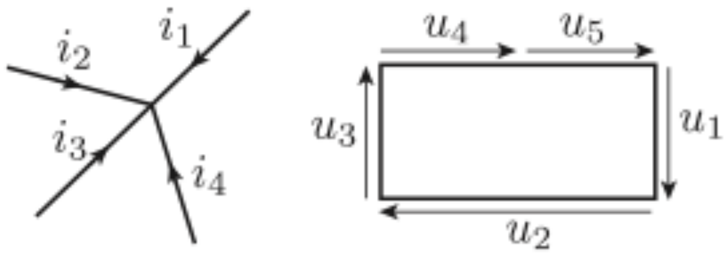
$$\mathcal{P} = \mathrm{UI} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathrm{LI}^2\right) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mathrm{LI}^2}$$

Symbole de la bobine :

Photo d'une bobine :

Les lois de Kirchoff

Les lois de Kirchoff (loi des nœuds, et loi des mailles) permettent d'exprimer la tension aux bornes de chaque dipôle et l'intensité en tout point d'un ***circuit électrique***



La loi des nœuds dérive de la conservation du courant, vue précédemment :

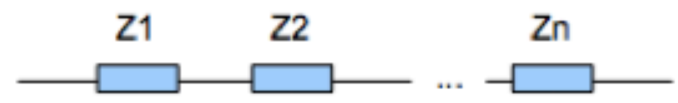
$$\boxed{\sum_k \underline{i}_k = 0}$$

La loi des mailles provient plus simplement du fait que la différence de potentiel aux entre un point et lui-même est nulle :

$$\boxed{\sum_k \underline{u}_k = 0}$$

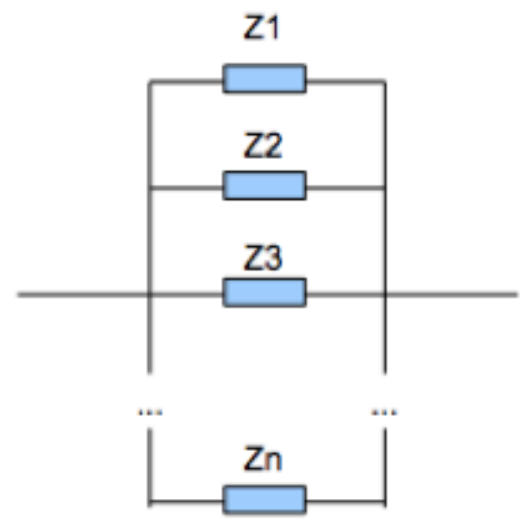
Association d'impédances

On démontre facilement, en s'appuyant sur les lois de Kirchoff, que :



association d'impédances en série

i) Association série $\boxed{Z = \sum_k Z_k}$



association d'impédances en parallèle
(ou en dérivation)

ii) Association parallèle $\boxed{Z^{-1} = \sum_k Z_k^{-1}}$

Fonction de transfert, exemple d'application à un circuit simple

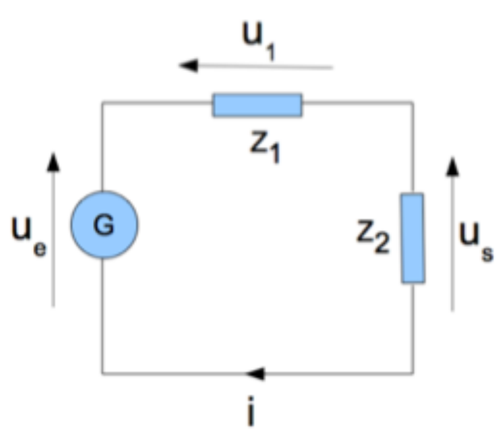
Les impédances étant dépendantes de la fréquence, la réponse de celui-ci sera en général dépendant de la fréquence d'excitation. *On définit en général une tension en entrée du circuit (u_e), une tension en sortie (u_s).*

On définit la fonction de transfert H(ω) du circuit (qui caractérise donc la réponse du circuit à u_e) comme par

$$\boxed{\underline{s} = \mathrm{H}(\omega)\underline{e}}$$

$$|\underline{s}| = |\mathrm{H}(\omega)|.|\underline{e}| \qquad \arg(\underline{s}) = \arg(\mathrm{H}(\omega)) + \arg(\underline{e})$$

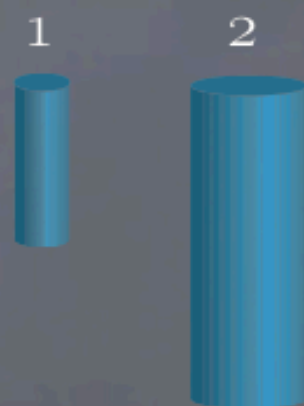
Exemple :



$$\boxed{\mathrm{H}(\omega) = \frac{\mathrm{Z}_2(\omega)}{\mathrm{Z}_1(\omega) + \mathrm{Z}_2(\omega)}}$$

Résistance

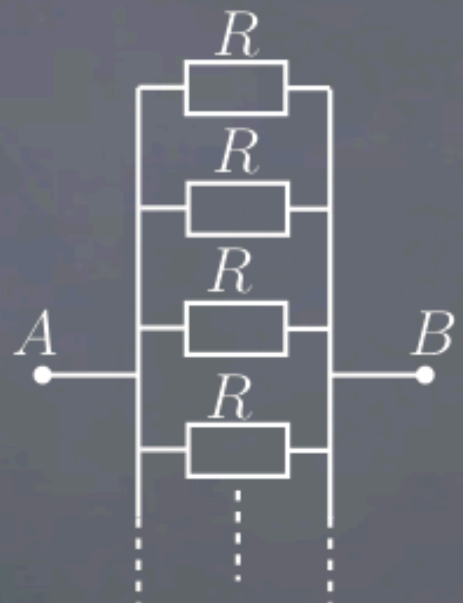
Deux résistances en forme de cylindre sont constituées du même matériau (même conductivité γ). La résistance 2 est deux fois plus longue et son diamètre est deux fois plus grand que pour la résistance 1. Que vaut le rapport des résistances R_2/R_1 ?



1. 2
2. 4
3. 1/2
4. 1/4
5. 1

Résistance

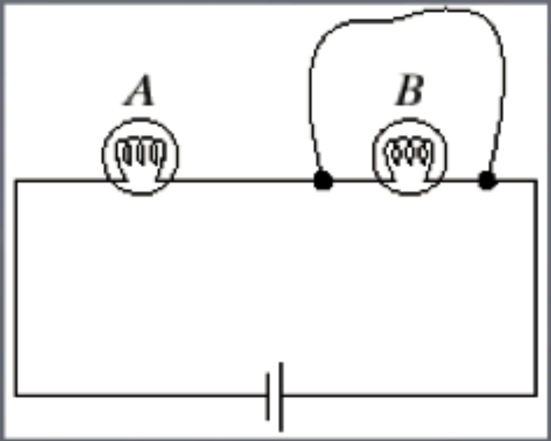
Au fur et à mesure que l'on ajoute des résistances dans le circuit parallèle ci-dessous, comment évolue la résistance totale entre les points A et B ?



1. Elle augmente.
2. Elle reste constante.
3. Elle diminue.

Résistance

Le circuit ci-dessous représente deux ampoules identiques alimentées en série par une pile de 9 V. Lorsque l'on dispose le fil en dérivation de l'ampoule B, la luminosité sur l'ampoule *A*



1. augmente.
2. reste constante.
3. diminue.