Calcul de champ électrique : le théorème de Gauss

$$\boxed{\oiint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = \frac{\mathrm{Q_{int}}}{\varepsilon_0}}$$

Le Flux du champ électrique à travers toute surface fermée est égal à la charge contenue dans le volume délimité par la surface fermée, divisée par la permittivité du vide.

- Dans des cas géométriquement « simples » (présentant des symétries et invariances), il est souvent plus simple d'utiliser le théorème de Gauss que de calculer des intégrales multiples.

Notion de flux et d'angle solide

Notion de flux

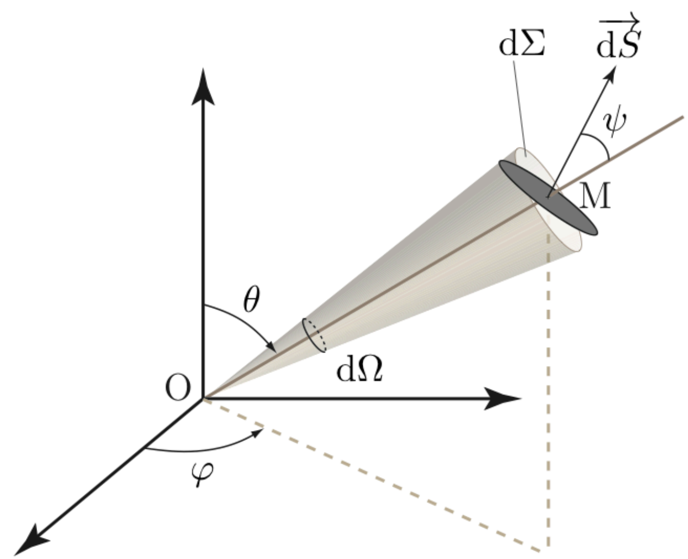
On appelle flux d'un champ de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ à travers une surface $\mathscr{S}$ la quantité (algébrique)

$$\Phi = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

Le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle q placée à l'origine, à travers une surface $\mathscr{S}$ s'écrit

$$\Phi_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathscr{S}} \frac{\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}}{r^2}$$

On introduit **l'angle solide :** $\Omega = \iint_{\mathscr{S}} \frac{\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}}{r^2}$



Propriétés : l' angle solide d'une surface fermée vue depuis l'intérieur de celle-ci vaut 4π. Vue depuis l'extérieur de celle-ci vaut zéro.

Démonstration du théorème de Gauss

Le flux du champ crée par une charge q à travers une surface vue sous un angle solide Ω vaut

$$\Phi_q = \frac{q\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$$

Le flux à travers une surface d'un ensemble de charges q_i vaut donc

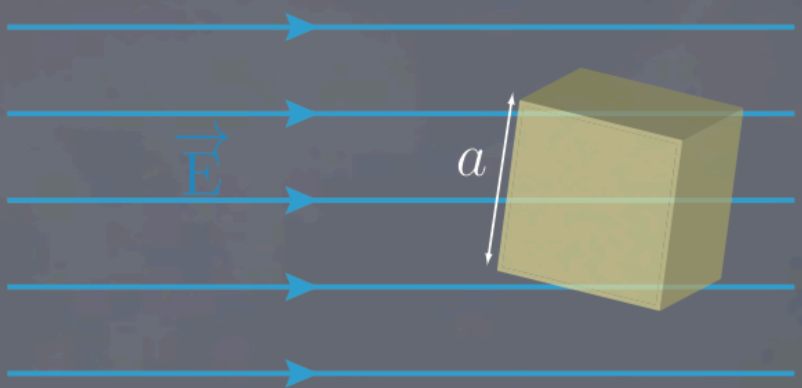
$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\Omega_i$$

Si l'on considère une surface fermée, Ω_i ne peut prendre que 2 valeurs : zéro si la charge q_i est extérieure au volume délimité par la surface, et 4π si elle est à l'intérieur. On obtient donc le résultat souhaité

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times 4\pi \sum_{q_i \in \mathscr{S}} q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Flux

On plonge une surface imaginaire de forme cubique dans un champ électrique uniforme et constant $\overrightarrow{E}$.

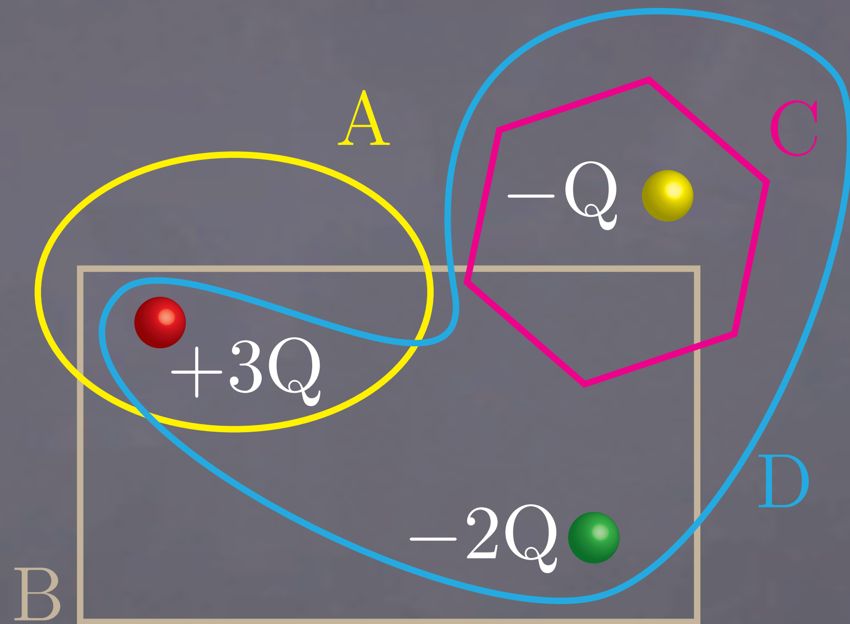


Le flux du champ électrique à travers le cube vaut

1. Ea^2
2. $-Ea^2$
3. $2Ea^2$
4. $-2Ea^2$
5. $6Ea^2$
6. $-6Ea^2$
7. Zéro
8. Cela dépend de l'orientation du cube avec les lignes de champ.

Théorème de Gauss

Les surfaces A, B, C et D sont supposées fermées. Quelle surface possède le plus grand flux du champ électrique ?



1. A=B=C=D
2. C>B>A>D
3. A>B=D>C
4. C>B>A=D
5. Aucune de ces solutions

Théorème de Gauss

On considère une charge q et une surface de Gauss sphérique $\mathscr{S}$ de rayon R légèrement décentrée par rapport à la charge q.

À quelle étape le raisonnement suivant est-il faux ?

1. $\oint\!\!\oint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \dfrac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$
2. $\oint\!\!\oint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$
3. $\oint\!\!\oint_{\mathscr{S}} E\,\mathrm{d}S = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$
4. $E \oint\!\!\oint_{\mathscr{S}} \mathrm{d}S = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$
5. $E\,4\pi R^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$
6. toutes les étapes sont correctes

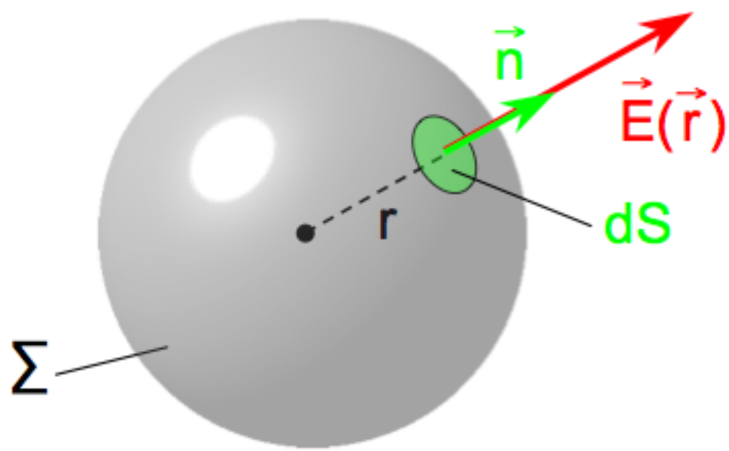
UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

La charge ponctuelle

On a démontré le théorème de Gauss en s'appuyant sur l'expression du champ crée par une charge ponctuelle.

Le théorème de Gauss est donc une reformulation (plus compacte et pratique) de l'expression du champ électrostatique, ou de la force de Coulomb, qui provient de la variation de celle-ci en $1/r^2$.

On peut bien sûr faire le « chemin inverse » :



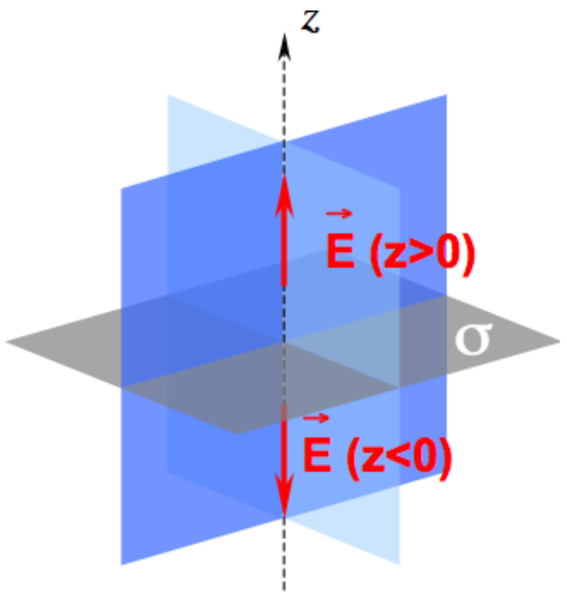
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = E(r) \oiint_{\Sigma} dS = 4\pi r^2 E(r)$$

et $$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

d'où : $$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Le plan infini uniformément chargé

Analyse des symétries et invariances :



Invariances par translation suivant x et y :

$$\vec{E} = \vec{E}(z)$$

On définit un point M de côte z, au niveau duquel on cherche à calculer le champ électrique.

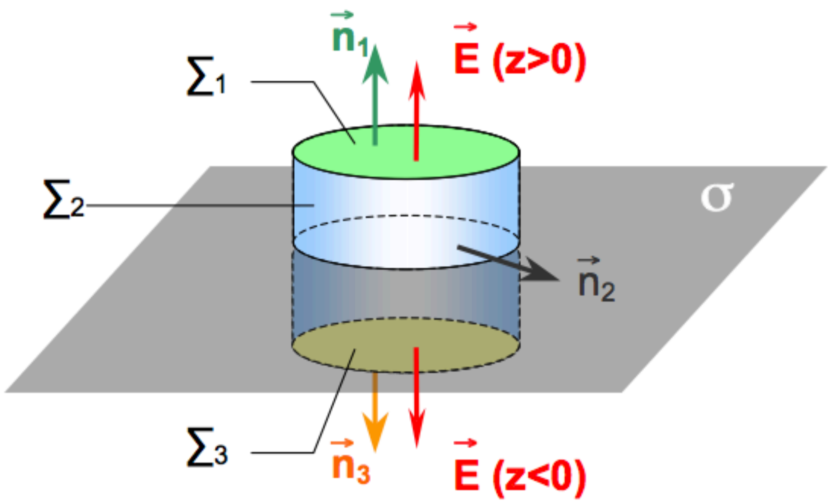
Plans de symétrie :
Tout plan passant par M et perpendiculaire au plan chargé est plan de symétrie :

$$\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$$

Le plan chargé (z=0) est lui même un plan de symétrie : $E(-z) = -E(z)$

Le plan infini uniformément chargé

On choisit une surface fermée (surface de Gauss) « pratique » étant données les symétries du problème : ici, un cylindre à cheval sur le plan chargé et symétrique par rapport à ce plan convient bien.



On calcule le flux du champ électrique à travers cette surface, **orientée de l'intérieur vers l'extérieur**

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

Pour z>0, on a :

$$\Phi = E(z)\pi R^2 + 0 - E(-z)\pi R^2$$

On calcule la charge Q_{int} totale à l'intérieur de la surface : $Q_{int} = \sigma\pi R^2$

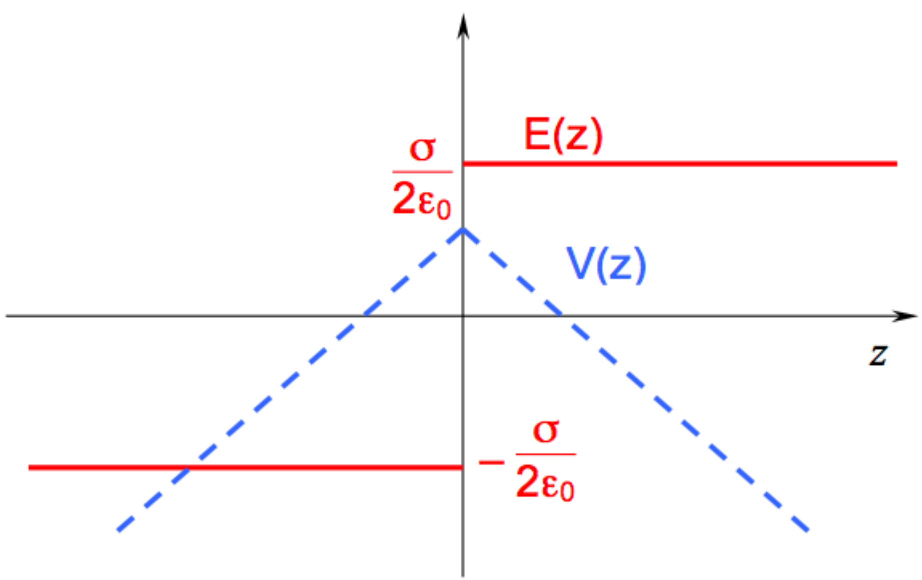
Le théorème de Gauss nous donne : $\vec{E}(z>0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$ et $\vec{E}(z<0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$

Le plan infini uniformément chargé

On peut calculer le potentiel associé :

$$E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \Rightarrow \qquad V(z) = -\int E(z)\,dz$$

D'où $$V(z) = \pm\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}(+\ \mathrm{Const})$$



Le plan infini uniformément chargé mais avec une fissure (infinie aussi) dedans…

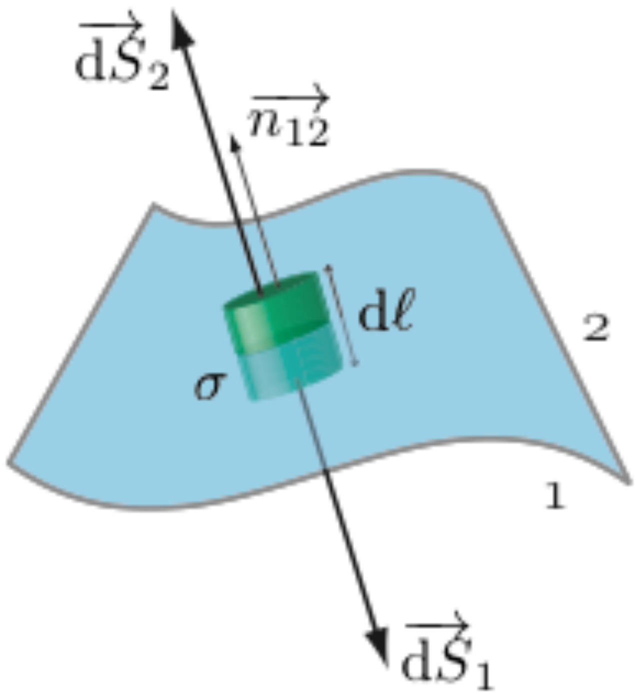
Comment s'y prendre ?

Exercice corrigé par B. Lamine (niveau ++) :

http://video.upmc.fr/differe.php?collec=E_C_correction_cours_lp_205_2012&video=4

Discontinuité du champ à la traversée d'une surface chargée

On peut généraliser le calcul fait pour le plan infini à toute surface chargée, en prenant une surface de Gauss de taille infinitésimale



Th. Gauss : $d\Phi = \sigma dS/\epsilon_0$

Flux : $d\Phi = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2$

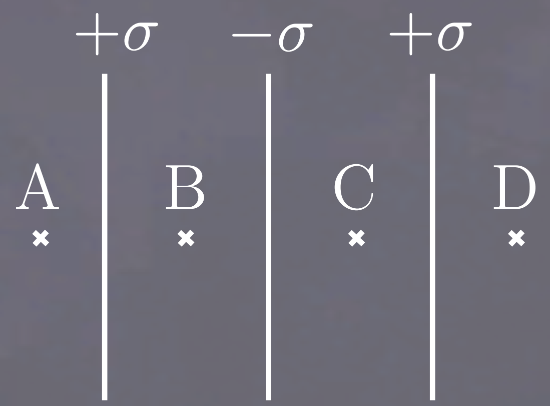
$$d\Phi = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} dS$$

On obtient le résultat suivant, valable pour la composante normale du champ électrique dans un voisinage « infiniment » proche du plan :

$$\vec{n}_{12} \cdot \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Plan chargé

On considère trois plans infinis chargés.

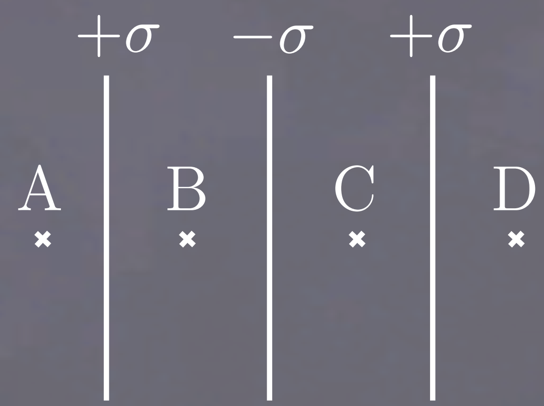


Quelle est la direction du champ électrique au point B ?

1. vers la droite
2. vers la gauche
3. le champ est nul

Plan chargé

On considère trois plans infinis chargés.

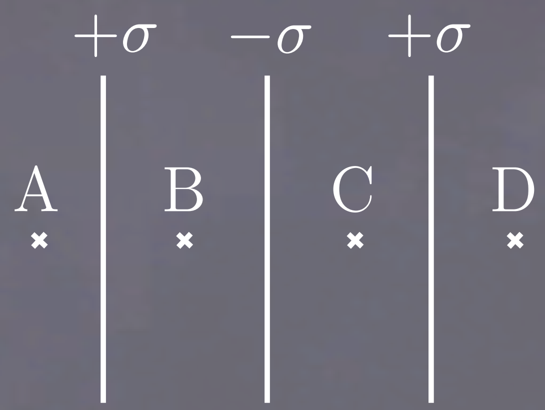


Quelle est la direction du champ électrique au point D ?

1. vers la droite
2. vers la gauche
3. le champ est nul

Plan chargé

On considère trois plans infinis chargés.



Quelle est la valeur de l'amplitude du champ électrique au point B ?

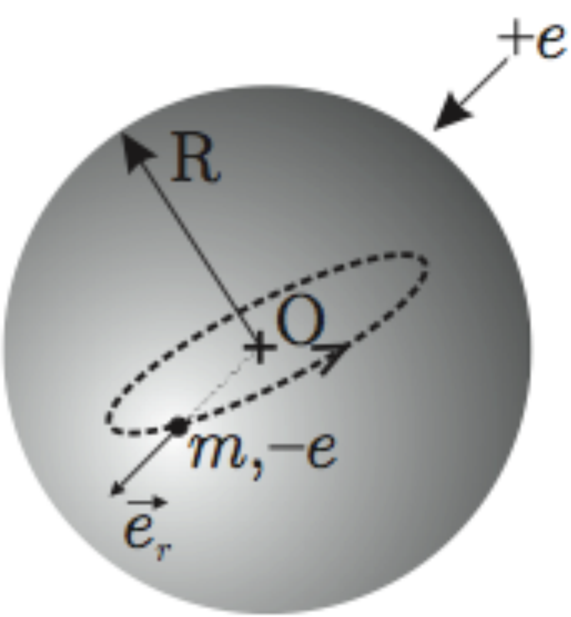
1. $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$
2. $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
3. $\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$
4. $\dfrac{2\sigma}{\varepsilon_0}$
5. $\dfrac{3\sigma}{\varepsilon_0}$
6. $\dfrac{\sigma}{3\varepsilon_0}$

Calcul du cylindre infini uniformément chargé ?

Autres cas géométriquement « simples » et typiques :
boule, sphère, fil etc. seront vus en TD

Modèle atomique de Thomson (1904)
(pour vous amuser chez vous)

- Thomson découvre l'électron en 1897, il cherche un modèle d'atome incluant ces « corpuscules » : il propose que la charges des électrons soit neutralisée par un nuage de « substance » de charge positive



- Charge volumique du nuage sphérique

$$\rho = 3e/4\pi R^3$$

- Champ électrique interne (cf TD 5)

$$\mathrm{E}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^3}\, r$$

- Dynamique (1D) de l'électron donnée par

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi m \varepsilon_0 \mathrm{R}^3}$$

Modèle atomique de Thomson (1904) (pour vous amuser chez vous)

- On cherche à estimer l'énergie d'ionisation : pour cela on commence par calcule le potentiel électrostatique dans l'atome

$$V(r) = -\frac{e}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r^2 + C^{te} \qquad \text{pour} \qquad r \leqslant R$$

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{pour} \qquad r \geqslant R$$

- La condition de continuité de V en r = R nous donne $Cte = \frac{3e}{8\pi\varepsilon_0 R}$

- D'où $V(r < R) = \frac{e}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)$ Cf TD5

- L'énergie à fournir pour ioniser l'atome dans le cadre de ce modèle vaut donc environ

$$E_{ionisation} \sim E_p(r = 0) = \frac{-3e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Modèle atomique de Thomson (1904)
(pour vous amuser chez vous)

- Le seul paramètre libre est R : environ 1 Angström : $\mathrm{T} \approx 4 \times 10^{-16}$ s
- Longueur d'onde associée : $\lambda = cT \simeq 118nm$
- Radiation UV Lyman-alpha = 121 nm
- Energie d'ionisation : E ≈ 20 eV
- Energie d'ionisation « constatée » de l'atome d'hydrogène : E = 13.6 eV
- On ne tombe pas trop loin ! Le modèle est bien sûr incompatible avec la découverte ultérieure du noyau par Rutherford (1911) dans le cadre d'expériences menées justement pour tester ce modèle de Thomson.

Relation locales entre champ et source : l'équation de Maxwell-Gauss

- On a vu et démontré le théorème de Gauss. Il s'agit **<u>d'une relation intégrale</u>** entre le champ E et sa source.

- On peut réécrire le théorème de Gauss en introduisant la charge volumique

$$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{P \epsilon \mathscr{V}} \rho(P) \mathrm{d}\tau,$$

- Qui peut se réécrire, selon le théorème de Green-Ostogradsky (Théorème Flux-Divergence) :

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- **<u>Il s'agit de l'équation de Maxwell-Gauss, valable en tout point de l'espace, à tout instant, dans un cadre statique comme dynamique.</u>**

Réécriture pour le potentiel : équations de Poisson et de Laplace

- Dans le cas statique, on a vu que le champ dérivait d'un potentiel scalaire,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

- L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit donc pour le potentiel sous la forme

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

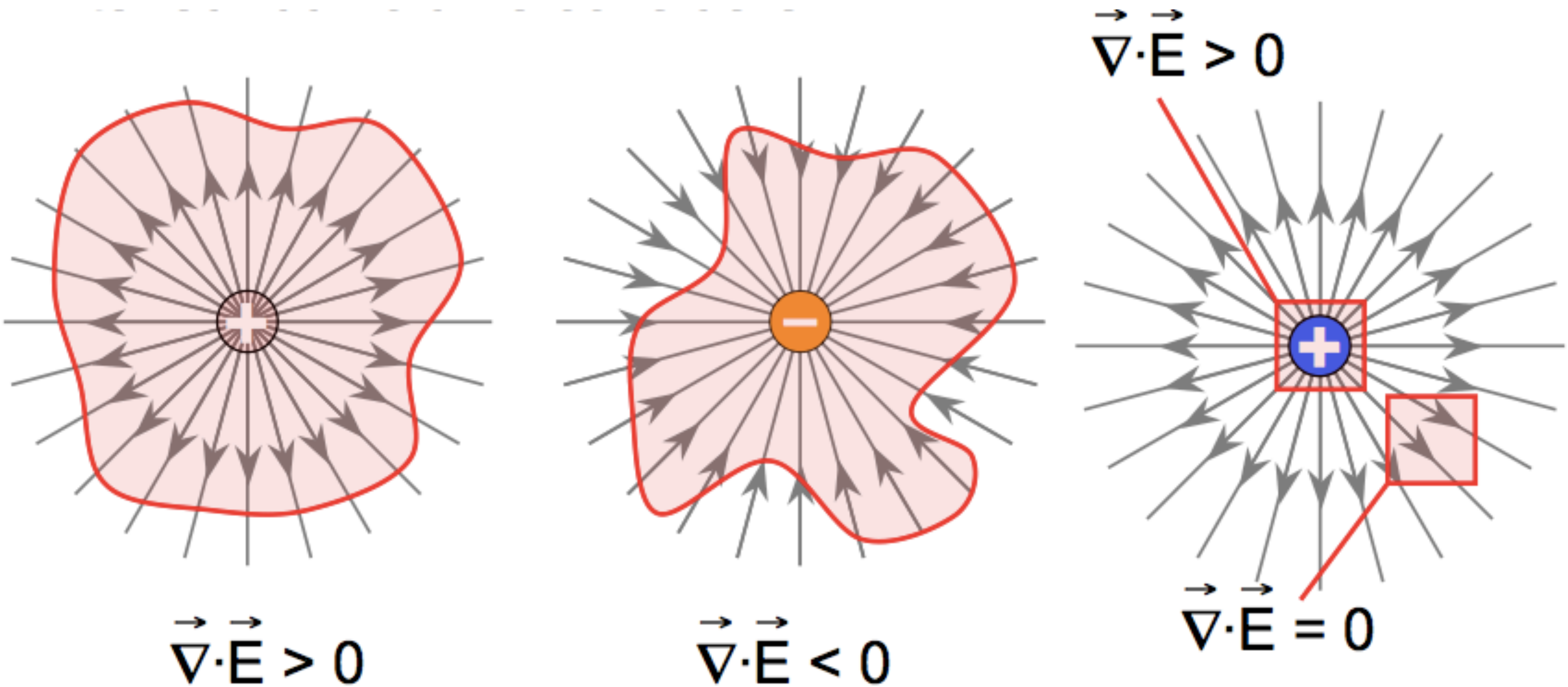
- Cette équation n'est à priori valable que dans le cas statique. Cependant, on peut se placer dans une jauge (c'est à dire faire *un choix particulier* de relation entre V et le potentiel vecteur A) telle que cette équation soit valable tout le temps. Ce choix de jauge est appelé **jauge de Coulomb**.

- En l'absence locale de charge volumique, l'équation de Poisson prend la forme de l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0$$

Interprétation physique :
La divergence du champ E

- Lien entre présence locale de charge et notion de divergence



Maxwell-Gauss : calcul-express ? Cylindre ? Sphère ?

1. Choix du système de coordonnées adéquat

2. Invariances : dépendance sur les coordonnées

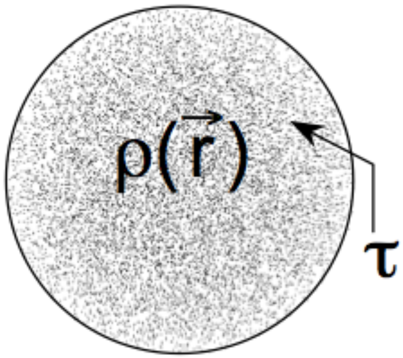
3. Plan de symétrie : direction du vecteur E

4. Maxwell-Gauss : Equation différentielle du premier ordre

5. Résolution de l'équa-diff avec des conditions aux limites déterminées par les symétries ou la continuité du champ (si pas de charges surfaciques).

Densité d'énergie électrostatique

- On a vu précédemment que l'énergie potentielle d'une distribution volumique de charge peut s'écrire



$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_\tau \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, d\tau$$

- **<u>On se propose de montrer qu'on peut exprimer cette énergie sans faire apparaitre la source ρ(r), donc uniquement en fonction du champ E. D'après l'équation de Maxwell-Gauss :</u>**

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint \mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) V(\vec{r}) d\tau$$

Densité d'énergie électrostatique

- On utilise l'identité vectorielle :

$$\mathrm{div}(V\vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}}V \cdot \vec{E} + V.\mathrm{div}(\vec{E})$$

- Et on obtient :

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_T \mathrm{div}(V\vec{E})d\tau - \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_T \vec{\mathrm{grad}}V \cdot \vec{E}d\tau$$

- Le théorème de Green-Ostogradsky nous donne le premier terme :

$$\iiint_{\mathrm{T}} \mathrm{div}\,(\mathrm{V}\overrightarrow{\mathrm{E}})\mathrm{d}\tau = \oiint_{\mathscr{S}} \mathrm{V}\overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} \to 0 \text{ quand } \mathrm{T} \to \text{tout l'espace}$$

- Elle tend vers 0 lorsque le rayon typique R de cette surface tend vers l'infini, puisque « loin » de la distribution de charge, E décroit en R^2 et V en R, tandis que S augmente en R^2. Il reste donc :

$$E_p = \frac{1}{2}\iiint_\tau \rho V d\tau = \iiint_{espace} \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 d\tau$$

Energie interne d'une sphère chargée uniformément (fait pendant le TD4)

- Sphère de rayon R, charge volumique ρ constante (calcul de V(r) fait en TD5. Ici, seul V(r<R) est utile puisqu'on intègre que jusqu'à R).

$$E_{int} = \int_0^R \frac{\rho}{2} V(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

- D'après la relation démontrée précédemment, cette énergie peut aussi être calculée en intégrant le carré du champ E, mais cette fois **sur tout l'espace** (i.e. il faut utiliser les 2 expressions de E, pour r<R et r>R)

$$E_{int} = \int_0^\infty \frac{\varepsilon_0}{2} E(r)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

- Dans les deux cas, on obtient

$$E_{int} = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0} R^5$$