Module 2P021

Electromagnétisme et Electrocinétique

Cours d'Arnaud Zaslavsky, année 2017

Contact :

arnaud.zaslavsky@obspm.fr
ou
arnaud.zaslavsky@upmc.fr

Déroulement du cours

Cours : 17 séances de 2h (34h)

- 5 séances le jeudi de 13h45 à 15h45 : amphi 34A
- 12 séances le vendredi de 10h45 à 12h45 : amphi 24
- Mineure & mono-disciplinaire

Travaux dirigés & assimilés : 20 séances de 2h (40h)

- Polys de TD/TP distribués pendant la 1ere séance de TD
- 14 séances de TD
- 4 séances de résolution de problèmes (RP) - **évaluées**
- 2 séances de tutoriels

Travaux pratiques : 4 séances (16h) - évalués

- 2 TP : Magnétostatique – Capacité - Induction
- 2 TP/TD sur l'électrocinétique (partie TD peut tomber à l'examen)

HPP

- Tous les vendredi entre 16h et 18h, à partir du 20/01 jusqu'au 25/03 inclus - *Dernier cours le (25/03)*

Modalités d'évaluation

Contrôle continu sur 28 points

- 1 Contrôle en amphi (fin février, 18h15-19h45) : 20 pts
- 4 Résolution de problèmes : 8 pts (note globale)

Travaux pratiques sur 16 points

- un compte rendu à rendre à la fin de chaque séance, chacun compte pour 4/16.

Examen 1ere session sur 56 points

Question : vous êtes en :

1. Monodisciplinaire physique
2. Mineure Physique + Majeure Mathématiques
3. Mineure Physique + Majeure Biologie
4. Mineure Physique + Majeure Chimie
5. Mineure Physique + Majeure Mécanique
6. Mineure Physique + Majeure Electronique
7. Mineure Physique + Majeure Géosciences
8. Mineure Physique + Majeure Informatique
9. Autre chose

Electromagnétisme : introduction générale

Electromagnétisme : unification de deux concepts historiquement considérés comme distincts, l'électricité, et le magnétisme

Unification réalisée par Maxwell (1887)

- Deux champs vectoriels dont les propriétés sont déterminées et reliées par 4 équations

- Electrostatique (Maxwell-Gauss)
- Magnétostatique (Maxwell-Ampère)
- Induction (Maxwell-Faraday)
- Absence de monopole magnétique

On ajoutera un terme dit « courant de déplacement » (introduit par Maxwell pour rendre les équations compatibles avec la notion de conservation de la charge) à l'équation de Maxwell-Ampère.

On en déduira que la lumière est une onde électromagnétique !

Chapitre 1 :

Electrostatique

Notion de charge électrique

- **La charge électrique est une propriété fondamentale de la matière**, tout comme peut l'être la masse.

- Elle quantifie l'intensité des interactions électromagnétiques entre objets

- **Il existe des charges positives et des charges négatives** (à la différence du cas de l'interaction gravitationnelle)

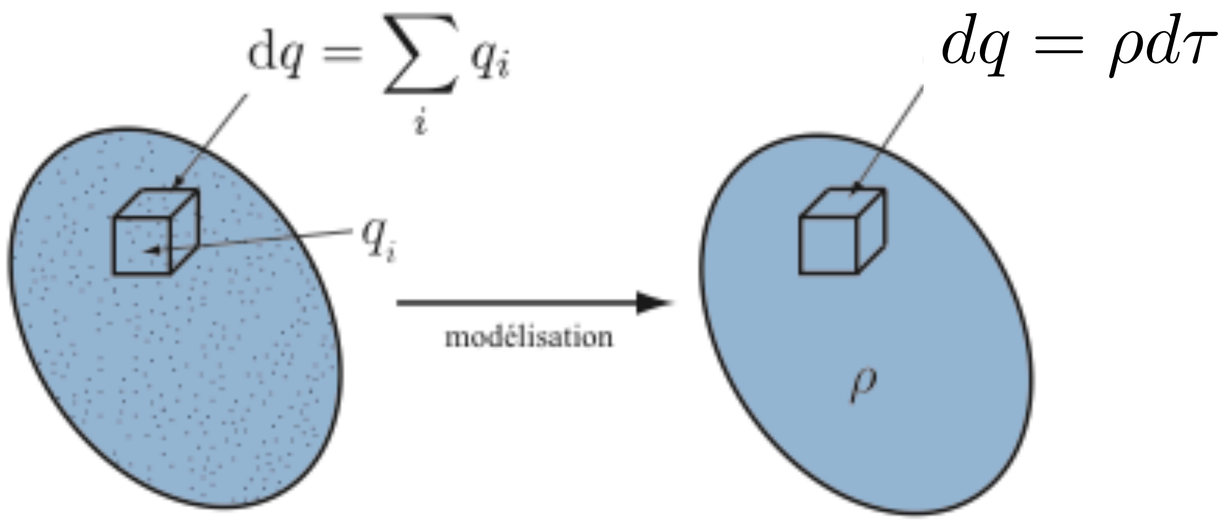
- **La charge électrique est quantifiée** (expérience de Milikan, 1909). Par convention, l'électron porte une charge –e, le proton porte une charge +e.

- e = 1.602 x 10^{-19} C (*note : le Coulomb n'est pas une unité SI fondamentale. Il est défini comme 1 C = 1 A.s*)

- **La charge d'un système isolé se conserve** (tout comme la masse en physique non-relativiste)

Modèle : Distribution continue de charges

- Lorsqu'on se place à une échelle suffisamment grande (quand il y a un grand nombre de charge dans un élément de volume dτ qu'on considère comme infinitésimal), il est pratique de considérer la charge comme continue

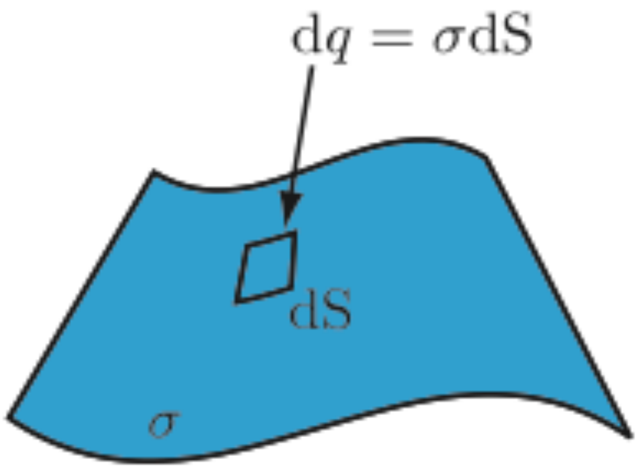


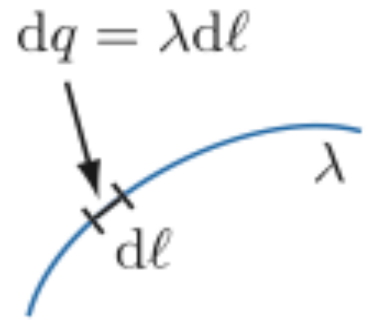
- On a ainsi défini la **densité volumique** de charge (en C.m^{-3}) :

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau}$$

Distribution surfaciques et linéiques

- De la même manière qu'on a défini une distribution volumique, on peut définir des **densités surfaciques, ou linéiques**, de charge





$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \qquad \text{en } C \cdot m^{-2}$$

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \qquad \text{en } C \cdot m^{-1}$$

Petite analogie…

La densité de population en France (source INSEE 2006).

On représente par une distribution continue le nombre d'individu par unité de surface

Evidemment, cette densité (tout comme la densité de charge), peut dépendre de la position.

Quelques questions avant de poursuivre…

Charges électriques

À combien d'électrons correspond une charge de -160 nC ?

1. Dix mille milliards.
2. Un million de milliards.
3. Un milliard de milliards.
4. Aucune des réponses précédentes.
5. Je n'ai pas eu le temps de calculer.

Charges électriques

On charge un ballon de baudruche à l'aide d'une peau de chat, puis on le gonfle. Comment évolue la distribution surfacique de charge ?

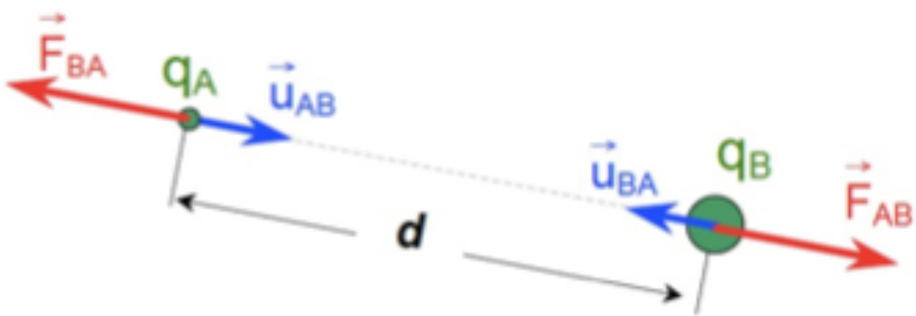
1. Elle diminue.
2. Elle augmente.
3. Elle reste constante.

Une expérience

(électrisation par frottement…)

Force de Coulomb

- Comme on vient de le voir, deux particules (ou corps) chargées sont en interaction. On appelle **<u>force de Coulomb</u>** la force qui s'exerce entre deux **charges fixes** q_A et q_B séparées par une distance d



$$\vec{F}_{AB} = K\frac{q_A q_B}{d^2}\vec{u}_{AB}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9.10^9 \text{ SI}$$

$$\vec{F_{AB}} = K\frac{q_A q_B}{AB^3}\vec{AB}$$

ϵ_0 est la **permittivité du vide**

Force de Coulomb

- **<u>Quelques propriétés :</u>**

- Peut être attractive ou répulsive suivant le signe de $q_A q_B$
- Est portée par l'axe AB

- Décroit en $1/r^2$

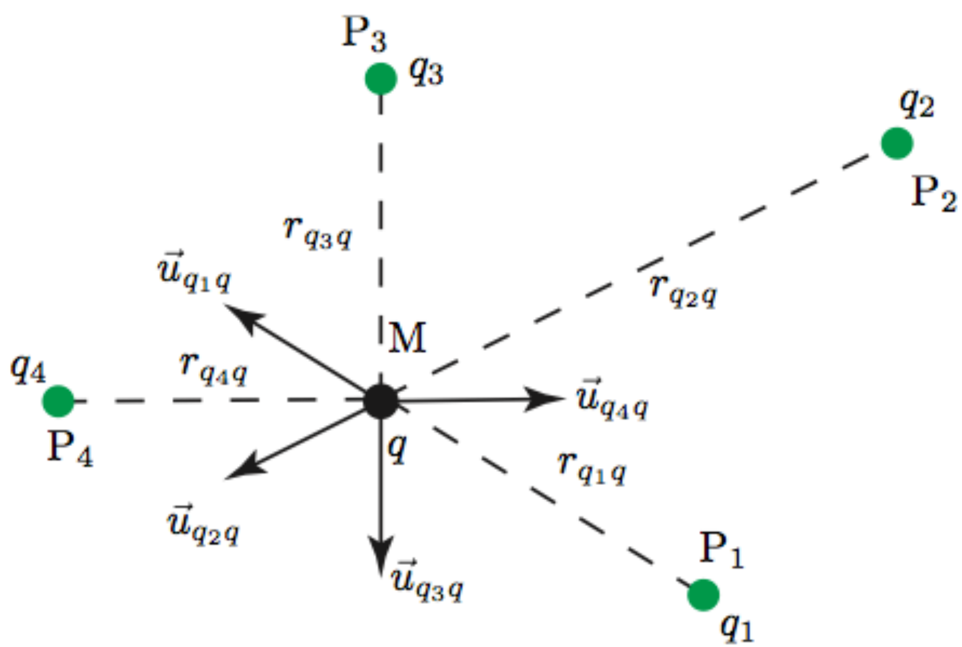
- **<u>Principe d'action/réaction</u>** : $$\vec{F}_{\mathrm{BA}} = K\frac{q_{\mathrm{A}}q_{\mathrm{B}}}{d^2}\vec{u}_{\mathrm{BA}} = -\vec{F}_{\mathrm{AB}}$$

- **<u>La force de Coulomb est conservative</u>**, c-à-d qu'il existe une fonction scalaire f telle que :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f$$

Principe de superposition

- En présence de plusieurs charges, la force exercée sur une charge q placée au point M est obtenue en sommant les forces de Coulomb produites par chacune des charges q_i placées au points P_i (différents de M). Il s'agit **du principe de superposition** :



$$\overrightarrow{F}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i \frac{\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3}$$

Le champ électrique

- D'après le théorème de superposition, on constate que la force de Coulomb exercée sur une charge q placée au point M peut s'écrire

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) = q\,\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M})$$

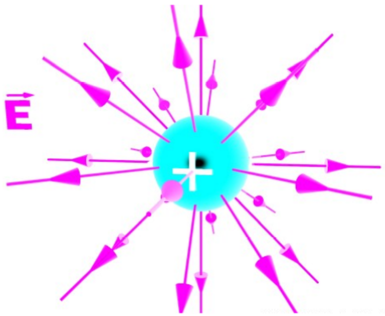
- Où on a introduit **<u>le champ vectoriel :</u>**

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i \frac{\overrightarrow{\mathrm{P}_i\mathrm{M}}}{\mathrm{P}_i\mathrm{M}^3}$$

- **Le champ ne dépend que de la répartition des sources, et pas de la charge au point M**

- **Le champ crée par une charge ponctuelle est radial :**

$$E_r(r,\varphi,\theta)\,\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$$

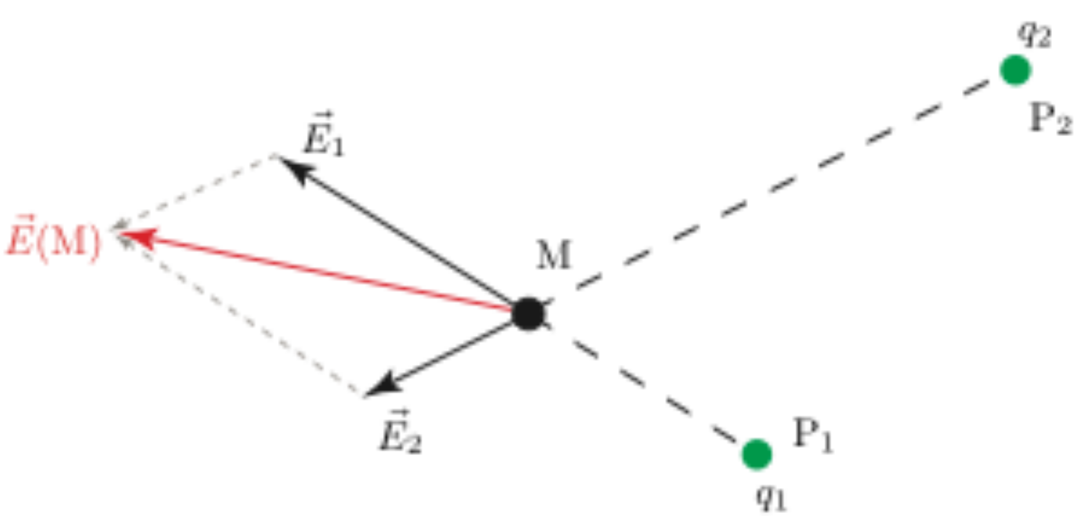


Principe de superposition

- Le principe de superposition vu précédemment s'écrit simplement pour le champ

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{E}}_i(\mathrm{M})}$$

Où $E_i(M)$ est le champ crée au point M par la charge placée en P_i



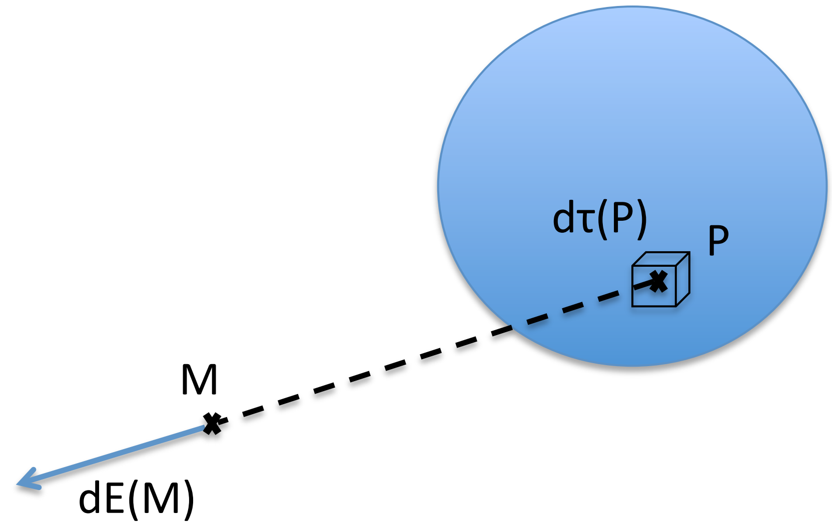
Champ crée par une distribution de charge continue

- D'après le théorème de superposition**, le champ crée en un point M par une distribution volumique de charge est la somme des champs infinitésimaux dE(M) crées par les charges élémentaires dq** contenues dans le volume considéré

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{P\vec{M}}{PM^3}$$

Donc en intégrant sur tout le volume

$$\vec{E}(M) = \iiint \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\epsilon_0}\frac{P\vec{M}}{PM^3}$$



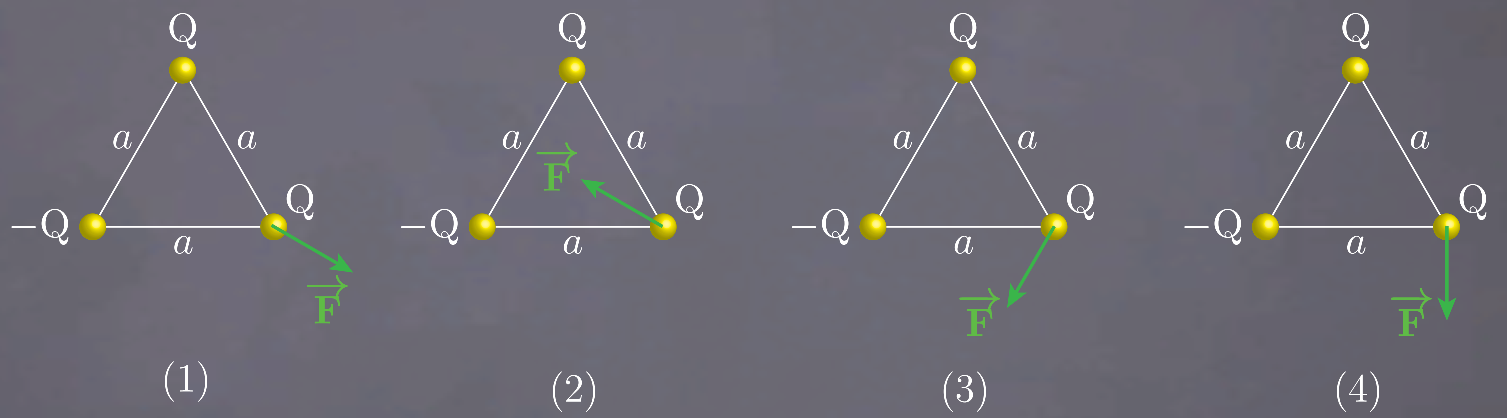
- Par le même raisonnement, les champs crées par des distributions de charges linéiques, ou surfaciques sont donnés par :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint dS\ \sigma(P)\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\ell\ \lambda(P)\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Force de Coulomb

Trois charges sont disposées aux sommet d'un triangle équilatéral. Quel dessin fournit une représentation correcte de la force de Coulomb exercée sur la charge située en bas à droite ?



1. (1)
2. (2)
3. (3)
4. (4)
5. Aucun de ces dessins.

Force de Coulomb

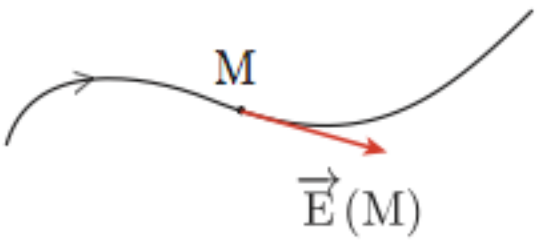
On considère, dans une première situation, la force de Coulomb exercée par une charge Q sur une autre charge q. Dans une deuxième situation, on remplace la charge Q par 10 charges $Q/10$ réparties sur un arc de cercle de centre q.

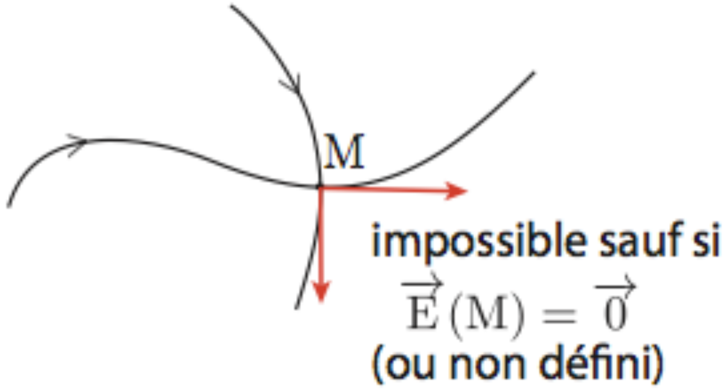
Que dire de la force de Coulomb exercée sur q dans la situation 2 par rapport à la situation 1 ?

1. La force est plus importante dans la situation 1.
2. La force est plus importante dans la situation 2.
3. Les forces sont les mêmes dans les deux cas.
4. Les forces sont de même amplitude mais de direction différente.

Représentation d'un champ vectoriel : les lignes de champ

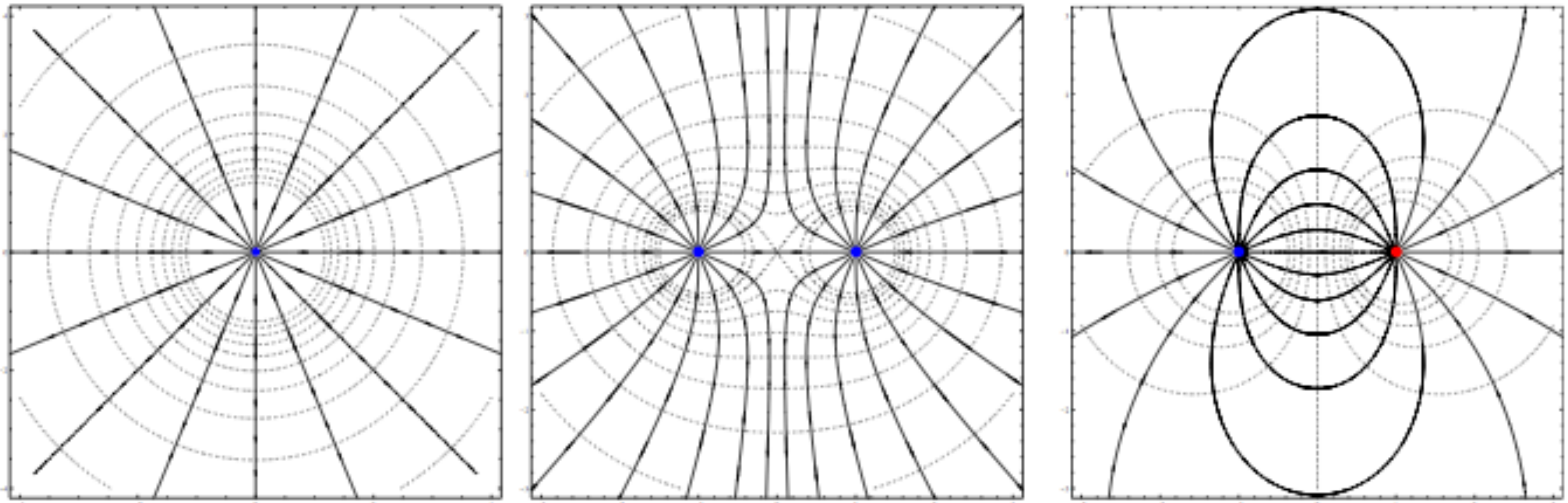
- Une ligne de champ est **<u>une courbe orientée</u>**, telle qu'en tout point M de cette courbe, le **<u>champ électrique en M est tangent à la courbe, et dans le sens de l'orientation de la courbe</u>**





- Les lignes de champ **<u>ne donnent pas l'amplitude du champ, mais on peut en avoir une idée qualitative</u>** en regardant si les lignes se rapprochent (la norme de E augmente) ou s'éloignent (la norme diminue)

Quelques exemples…



<u>Liens entre les symétries de la distribution de charge et celle du champ ?</u>

Règles d'invariances du champ électrique

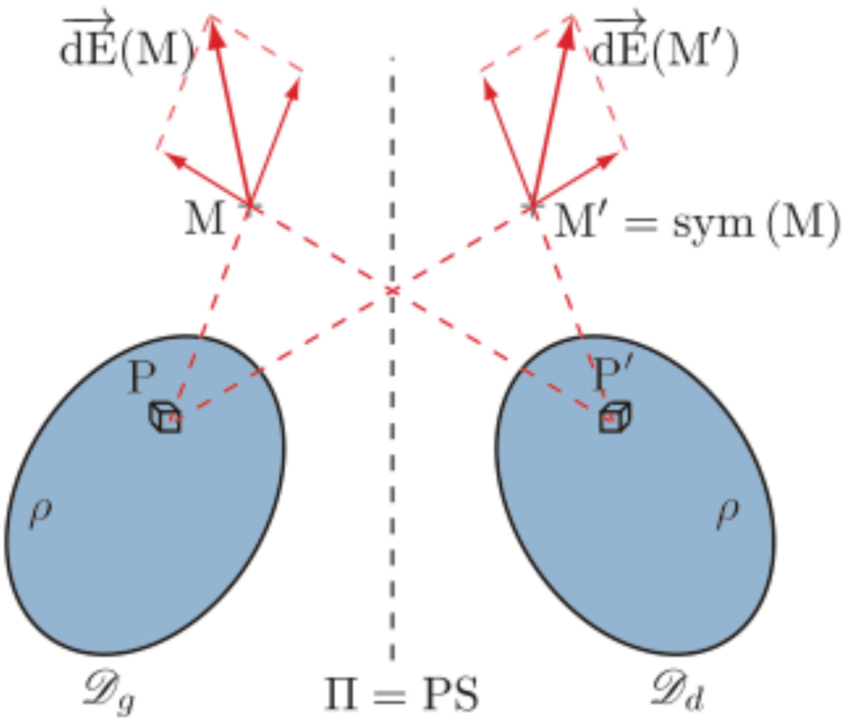
- <u>**Notion d'invariance**</u> : Soit un système physique S soumis à une transformation T (translation, rotation, symétrie…). **Le système S est qualifié d'invariant par la transformation T si T(S)=S**

- Les invariances de la distribution de charge se retrouvent dans celles du champ **: si la distribution de charge ne dépend pas d'une coordonnée, le champ n'en dépendra pas non-plus.**

- **Deux principaux types d'invariances :**
  - Invariance <u>par toute translation</u> suivant un axe (par ex, Oz) : le champ E ne dépend pas de la coordonnée z
  - Invariance <u>par toute rotation</u> autour d'un axe (par ex, Oz) : le champ ne dépend pas de l'angle associé à cette rotation (ex, angle azimutal φ pour le système de coordonées cylindriques associée à l'axe Oz)

Règles de symétrie du champ électrique

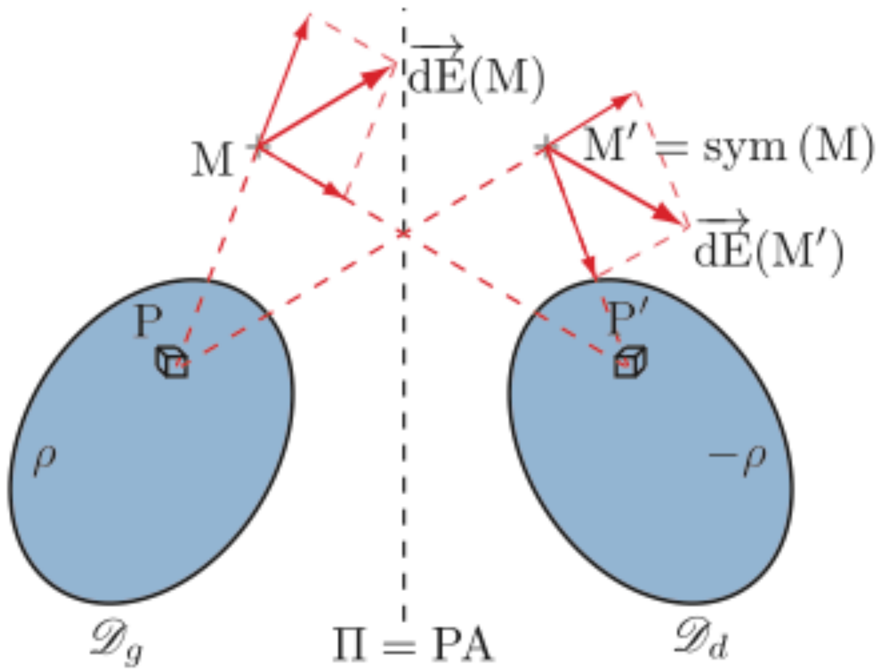
- **<u>Plan de symétrie (PS) d'une distribution de charge : tel que le symétrique de la distribution par rapport à ce plan est inchangée</u>** (redonne la même distribution de charge)



$$\vec{E}(\text{sym } M) = \text{sym } \vec{E}(M)$$

Règles de symétrie du champ électrique

- **<u>Plan d'antisymétrie (PA) d'une distribution de charge : tel que le symétrique de la distribution par rapport à ce plan donne l'opposé de la distribution</u>** (distribution d'origine, dans laquelle on inverse le signe de toutes les charges)



$$\overrightarrow{E}(\text{sym } M) = -\text{sym } \overrightarrow{E}(M)$$

Règles de symétrie du champ électrique

- **<u>Résumé IMPORTANT à retenir :</u>**

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{PS} : \overrightarrow{\text{E}}(\text{sym M}) = \text{sym } \overrightarrow{\text{E}}(\text{M}) \\ \text{PA} : \overrightarrow{\text{E}}(\text{sym M}) = -\text{sym } \overrightarrow{\text{E}}(\text{M}) \end{array}}$$

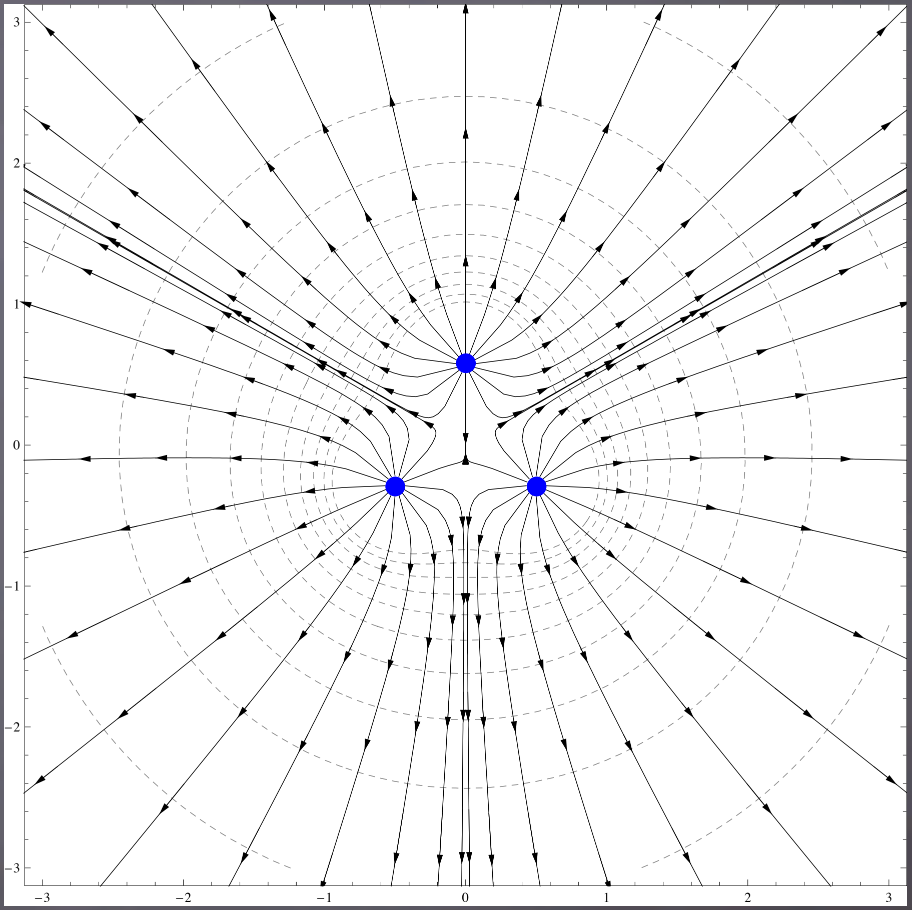
- **<u>Conséquence IMPORTANTE à retenir :</u>**

i) Si M appartient à un plan de symétrie de la distribution de charge (noté PS), alors $\overrightarrow{\text{E}}(\text{M})$ appartient à ce plan. On dit souvent par abus de langage que $\overrightarrow{\text{E}}$ appartient à ses plans de symétrie.

ii) Si M appartient à un plan d'anti-symétrie de la distribution de charge (noté PA), alors $\overrightarrow{\text{E}}(\text{M})$ est perpendiculaire à ce plan. On dit souvent que $\overrightarrow{\text{E}}$ est perpendiculaire à ses plans d'antisymétrie

Lignes de champ électrique

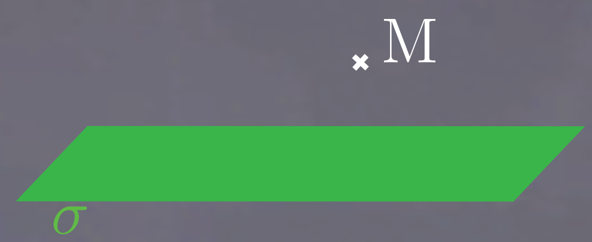
On considère les lignes de champ ci-contre.



1. Il n'y a pas de plan de symétrie.
2. Il y a un plan d'antisymétrie.
3. Les deux.
4. Aucune des propositions précédentes.

Invariance et symétrie

On considère un plan uniformément chargé en surface $\sigma > 0$, supposé horizontal.



Quelle est la direction et le sens du champ électrique au point M ?

1. $\rightarrow$
2. $\uparrow$
3. $\leftarrow$
4. $\downarrow$
5. $\odot$
6. $\otimes$
7. Aucune de ces directions.

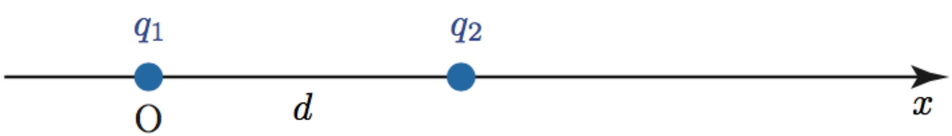
Energie potentielle électrostatique

- Calculons l'énergie nécessaire à construire une distribution de charge simple (***énergie potentielle d'interaction de e paire***) :

$$\vec{F}_{q_1 \to q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

$$W_{op} = -\int_{\infty}^{d} \vec{F}_{q_1 \to q_2} \cdot \vec{d\ell}$$

avec $\vec{d\ell} = dx\, \vec{e_x}.$



$$W_{op} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{d} \frac{dx}{x^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

- Le travail à fournir par l'opérateur est par définition (cf cours de mécanique) égal à <u>*la variation d'énergie potentielle*</u> du système formé par les deux charges q_1 et q_2 :

$$W_{op} = \Delta E_p = E_p(d) - E_p(\infty)$$

Et donc $\quad E_p(d) = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} \quad$ avec la convention $\quad E_p(\infty) = 0$

Potentiel électrostatique crée par une charge

- On définit le potentiel électrostatique crée au point M par une charge q placée au point O (on note r = OM) comme

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- L'énergie potentielle d'une charge q' placée à une distance r de O vaut donc

$$E_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} = q'V(r)$$

- Par construction (définition) de Ep, on a $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u_r}$

et donc le champ électrique est lié au potentiel par

$$\vec{E} = -\frac{dV(r)}{dr}\vec{u_r}$$

(vrai dans le cas d'une seule charge en O, sinon il faut faire appel à la notion de gradient)

Potentiel électrostatique

- **D'après le théorème de superposition**, l'énergie potentielle nécessaire pour amener une charge q à un point M, en présence d'un système de charges $q_{i=1,\ldots,N}$ est donc

$$E_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{P_iM}$$

- Elle peut s'écrire sous la forme $E_p = qV(M)$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{P_iM}, \text{ ou encore } V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(P)}{PM}d\tau$$

Puisque la force de Coulomb est par définition égale à l'opposé du gradient de Ep, on obtient ***dans le cas statique*** une relation générale entre le champ électrique et le potentiel :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{V}}$$

Potentiel électrostatique, propriétés

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V}$$

- <u>**V est un « champ scalaire ».**</u>
- <u>**V est (tout comme l'énergie potentielle) défini à une constante près.**</u> On prend en général la convention d'un potentiel nul à l'infini.
- Par linéarité de l'opérateur gradient, le principe de superposition s'applique aussi au potentiel
- Le champ créé par N systèmes de charges s'écrit en tout point M de l'espace comme la somme

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i + C^{te}$$

Conséquence importante : E est *non-rotationnel*

- **<u>Puisque dans le cas électrostatique, le champ peut s'écrire comme le gradient d'une fonction scalaire V, on peut facilement l'intégrer sur un chemin quelconque :</u>**

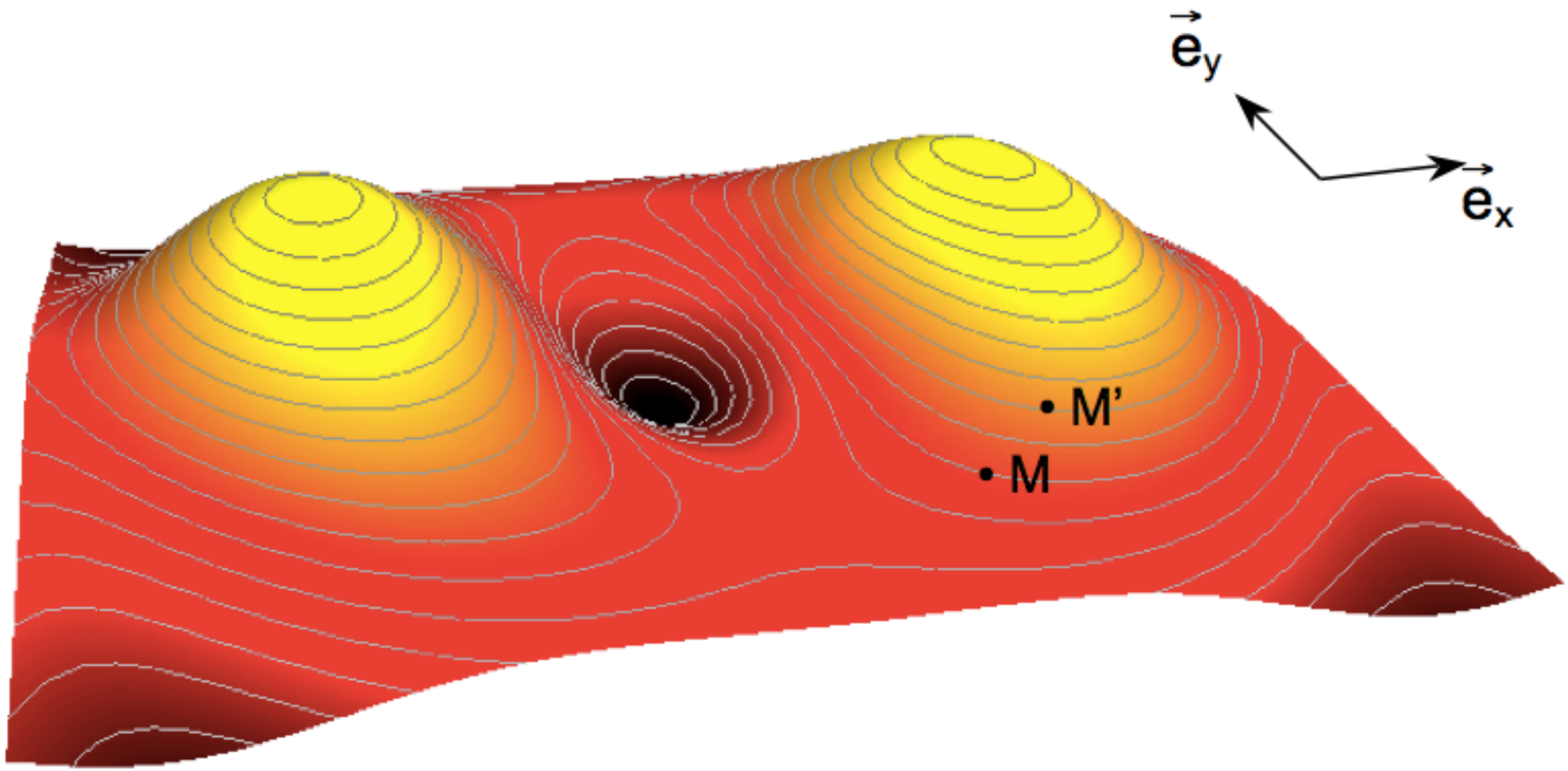
$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \int_{\mathcal{C}} -\vec{\mathrm{grad}} V \cdot \vec{d\ell} = -\int_{A}^{B} dV = V(A) - V(B)$$

- **<u>Et donc le long d'un contour fermé :</u>**

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\mathrm{rot}} \vec{E} = 0$$

<u>(d'après le *théorème de Stokes*)</u>

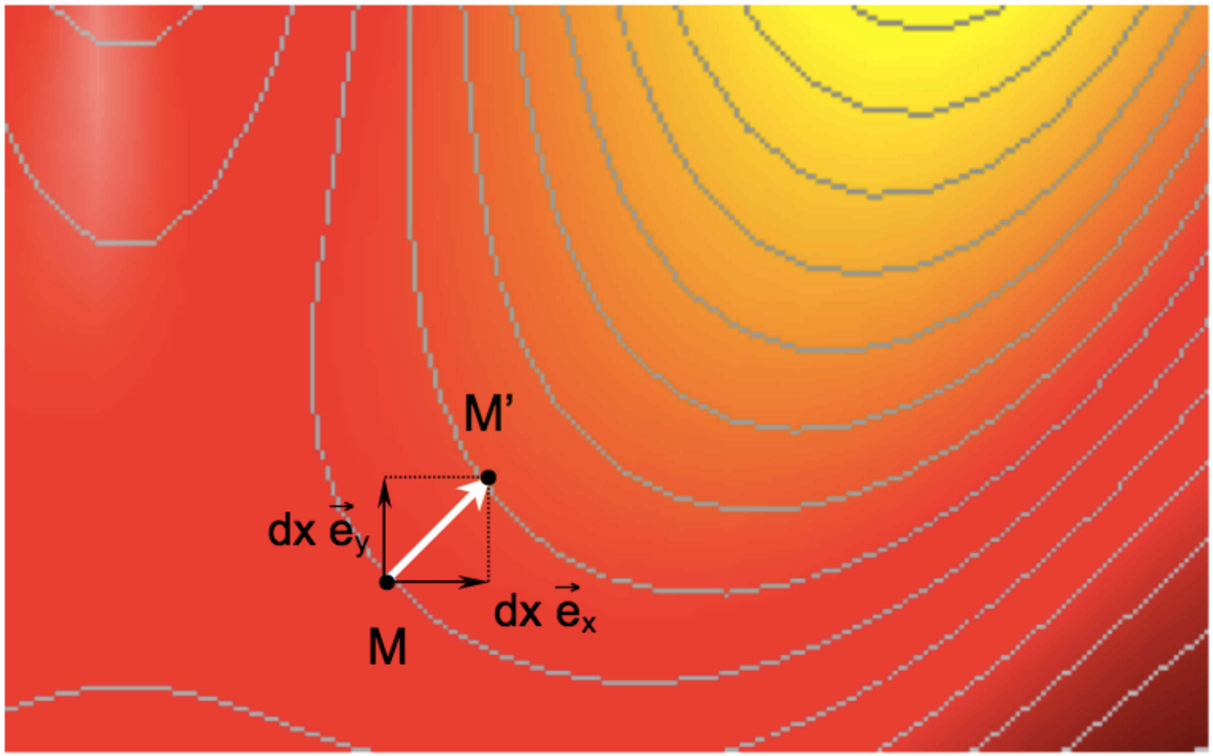
Représentation du champ : lignes équipotentielles (*isopotentielles*)



Vue en perspective de V(x,y)

Représentation du champ : lignes équipotentielles (*isopotentielles*)

Vue perpendiculaire à ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$)

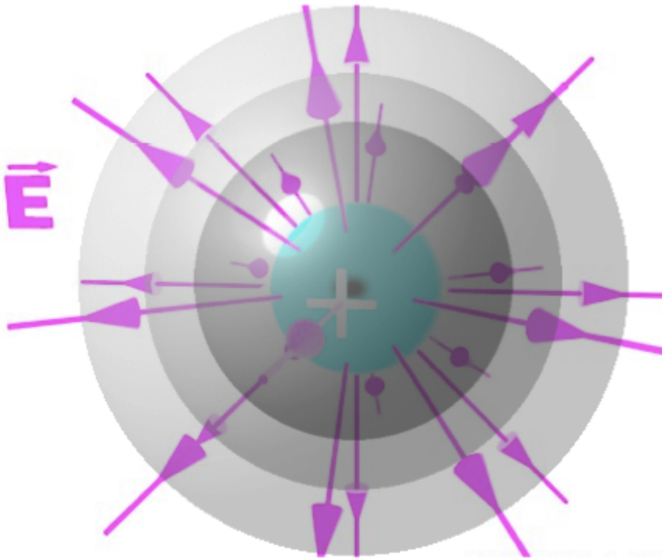


Le long d'une ligne équipotentielle : $dV = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{d\ell} = 0$

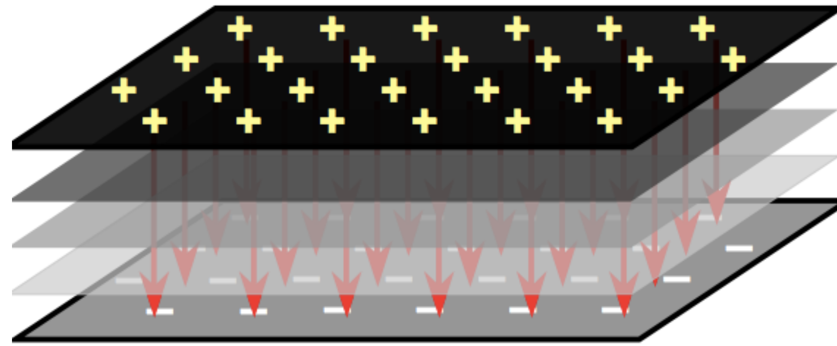
Le champ électrique est **donc toujours perpendiculaire** aux lignes équipotentielles

(en 3D, la notion de lignes équipotentielle devient celle de **surface équipotentielle**)

Surfaces équipotentielles



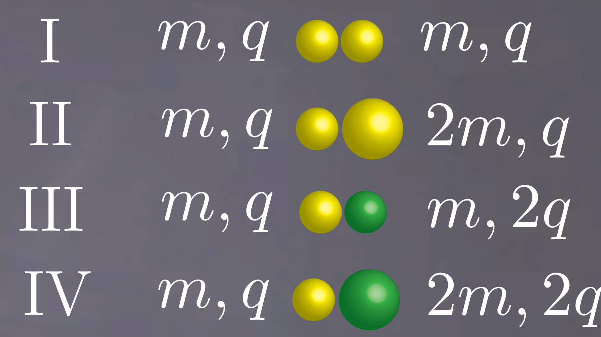
Pour une charge ponctuelle (ou toute autre distribution de charge à symétrie sphérique) : **<u>coquilles sphériques</u>**



Pour un ***<u>condensateur plan</u>***

Énergie potentielle électrostatique

On considère deux particules chargées maintenues côte à côte. On relâche la contrainte sur la particule de droite. On s'intéresse à la vitesse maximale que va acquérir cette particule.

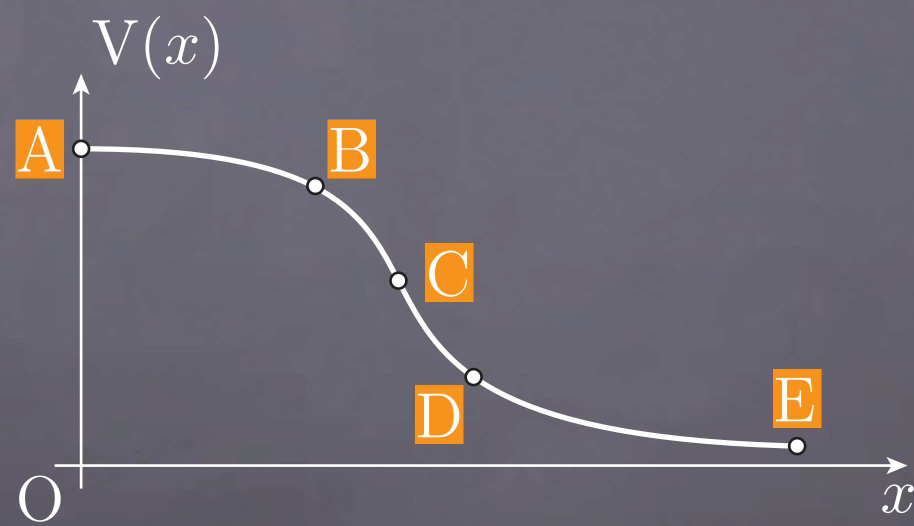


Dans quelle(s) situation(s) cette vitesse maximale sera-t-elle la plus grande ?

1. I seulement.
2. II seulement.
3. III seulement.
4. IV seulement.
5. II et III seulement.
6. I et IV seulement.
7. Aucune des propositions précédentes.

Potentiel électrique

On considère une région de l'espace où règne un potentiel $V(x)$ ne dépendant que de la coordonnée x et dont on donne une représentation ci-dessous. En quel point le champ électrique est-il le plus grand ?



Potentiel électrique

On dépose sans vitesse initiale une charge négative dans une région de l’espace où règne un champ électrique. Comment se déplace la charge ?

1. Vers une zone de potentiel électrostatique plus élevé.
2. Vers une zone de potentiel électrostatique plus faible.
3. Elle ne se déplace pas.
4. Pas assez d’informations pour conclure.

Energie potentielle d'un système de charges

- On a vu que l'énergie potentielle d'une paire de charges q_1 et q_2 distantes de r_{12} était

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

- Le travail nécessaire pour amener une troisième charge q_3 à une distance r_{13} de la charge 1 et r_{23} de la charge 2 est

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

- On construit ainsi notre système de N charges. Le travail nécessaire pour amener la i-ème est

$$W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j<i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

- L'énergie potentielle du système de charges ainsi construit vaut

$$E_p = \sum_{i=2}^{N} W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=2}^{N}\sum_{j<i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Densité d'énergie électrostatique
(*Pression électrostatique*)

- L'énergie potentielle de la distribution de charge est

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{paires(i,j)} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

- Ou encore $E_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$

- Pour une distribution continue de charge : $E_p = \frac{1}{2} \iiint \rho V \mathrm{d}\tau$

- On peut montrer que : $E_p = \iiint_{espace} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \mathrm{d}\tau$

- On a donc une expression **<u>de la densité d'énergie électrostatique</u>** (ou encore *pression électrostatique*) en fonction du champ