

# Le Vent Solaire

A. Zaslavsky

30 novembre 2025

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	equations fluides . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Le chauffage de la couronne solaire</b>	<b>3</b>
2.1	La région de transition . . . . .	3
2.2	Instabilité thermique . . . . .	3
2.3	Stabilisation par conduction . . . . .	6
2.4	D'où vient l'énergie ? . . . . .	7
2.5	Collisionnalité, nombre de Knudsen . . . . .	7
2.6	Modèle balistique : filtrage gravitationnel des vitesses . . . . .	9
2.7	Bibliographie . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Le vent solaire</b>	<b>11</b>
3.1	Le problème d'une couronne statique . . . . .	12
3.2	Modèle de Parker . . . . .	13
3.3	Flux de masse . . . . .	16
3.4	Clôtures polytropes, conditions d'existence du vent solaire. . . . .	18
3.5	Flux d'énergie . . . . .	20
3.6	Le rôle du champ électrique . . . . .	23
3.7	Bibliographie . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Le champ magnétique interplanétaire</b>	<b>24</b>
4.1	Théorème du gel . . . . .	24
4.2	La spirale de Parker . . . . .	25
4.3	Conditions aux limites, couche neutre. . . . .	28
4.4	Cycle solaire, vent lent et vent rapide. . . . .	29
4.5	Mouvement des particules chargées dans la spirale de Parker . . . . .	32
4.6	Moment angulaire du vent solaire, point d'Alfvén . . . . .	33
4.7	Petites échelles : Ondes et turbulence . . . . .	35
4.8	Bibliographie . . . . .	35

<b>A</b>	<b>Appendice : Equations fluides</b>	<b>36</b>
A.1	Densité . . . . .	36
A.2	Vitesse . . . . .	36
A.3	Energie . . . . .	37
A.4	Entropie . . . . .	38
<b>B</b>	<b>Appendice : Tenseur des contraintes de Maxwell</b>	<b>39</b>
B.1	Forme du tenseur . . . . .	39
B.2	Equation de la dynamique d'un plasma magnétisé . . . . .	40
B.3	Moment angulaire du vent solaire . . . . .	41

## 1 Introduction

### 1.1 equations fluides

Nous rappelons ici les équations décrivant l'évolution des moments  $(n, \mathbf{u}, p, \dots)$  de la fonction de distribution en vitesses d'une population de particules ponctuelles de masse  $m$  dans un champ de forces  $\mathbf{F}$ . Les équations sont présentées ici sous la forme qui sera celle utilisée dans la suite du cours :

- Equation de continuité (conservation du nombre de particules), qui relie la densité  $n$  (scalaire) à la vitesse moyenne  $\mathbf{u}$  (vecteur) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } n\mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

- Equation de conservation de l'impulsion, qui relie la vitesse moyenne  $\mathbf{u}$  (vecteur) à la pression  $p$  (dans le cas général un tenseur d'ordre 2, nous considérerons dans ce cours, pour éviter de trop compliquer, des milieux isotropes, et donc une pression scalaire  $p = nkT$ ). On considèrera ici un plasma dans l'approximation totalement non-collisionnelle, on néglige donc les effets de friction.

$$mn \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + n\mathbf{F} \quad (2)$$

- Equation de conservation de l'énergie, qui relie l'énergie interne (ou la pression) au flux de chaleur  $\mathbf{j}_{th}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( nm \frac{u^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \text{div} \left[ \mathbf{u} \left( nm \frac{u^2}{2} + \frac{5}{2} p \right) + \mathbf{j}_{th} \right] = n\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + Q \quad (3)$$

Dans cette équation, le terme  $\mathbf{j}_{th}$  décrit le transport de chaleur par conduction

thermique, tandis que  $Q$  (en  $[\text{W.m}^{-3}]$ ) décrit le transfert de chaleur depuis une source extérieure à la population de particules considéré ( $Q > 0$  si la chaleur entre dans le système).

- Et toute une série infinie d'équation portant sur les moments supplémentaires de la fonction de distribution. Puisqu'on ne peut résoudre cette série infinie il faut clore le système en utilisant une relation dite *de fermeture* ou *de clôture*, qui lie le moment de plus haut ordre apparaissant aux moments d'ordre inférieurs. On discutera dans la suite des relations de fermeture que l'on peut utiliser selon les cas.

La dérivation de ces équations à partir de l'équation cinétique décrivant l'évolution de la fonction de distribution des particules de la population considérée est présentée dans l'appendice A.

## 2 Le chauffage de la couronne solaire

### 2.1 La région de transition

La couronne solaire, c'est-à-dire la région supérieure de l'atmosphère solaire, est séparée de la chromosphère par une frontière très fine ( $\Delta h \sim 100 \text{ km}$ ), appelée région de transition. Cette frontière est caractérisée par un changement drastique, sur presque deux ordres de grandeur, de la température (cf. fig.1). Nous nous intéressons ici à la description de ce phénomène, d'importance dans le cadre de l'étude du vent solaire puisque, nous le verrons dans la section suivante, c'est l'énergie thermique de la couronne qui est la source de l'accélération du vent.

### 2.2 Instabilité thermique

Nous considérons le plasma présent dans la basse atmosphère solaire, dans les zones de la chromosphère et de la basse couronne. En régime stationnaire ( $\partial_t = 0$ ) et en négligeant les effets de convection ( $\mathbf{u} = 0$ ), l'équation de conservation de l'énergie (3) pour ce plasma, prend la forme suivante

$$Q = \text{div } \mathbf{j}_{th}, \quad (4)$$

qui décrit le régime stationnaire comme un équilibre entre la puissance injectée localement et la répartition spatiale de cette chaleur par effet de conduction thermique. Dans le cas de l'atmosphère solaire, le terme  $Q$  a deux composantes dominantes :  $Q = Q_c - Q_{ray}$ . D'une part un terme de chauffage  $Q_c > 0$ , dont nous ne connaissons pas l'origine (cf. discussion plus bas) mais dont on constate les effets, et que l'on cherche à quantifier, et d'autre part un terme de refroidissement radiatif

$$Q_{ray} \simeq n_e n_H \Lambda(T) \quad (5)$$

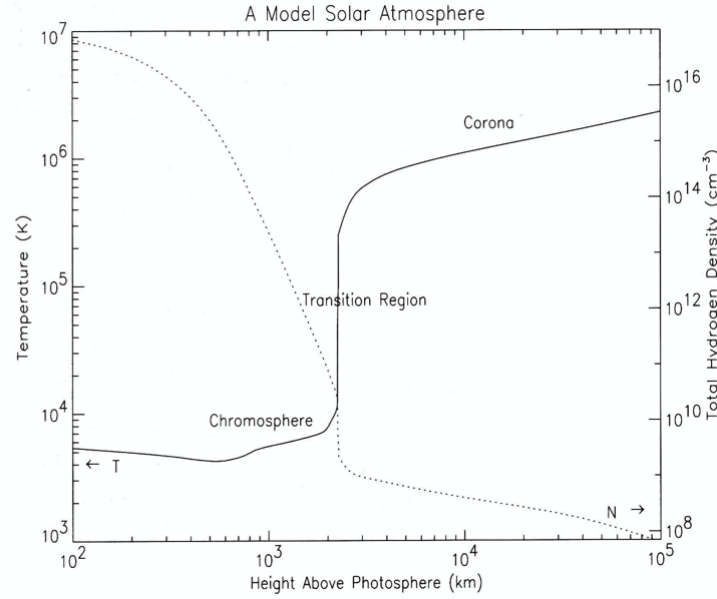


FIGURE 1 – Evolution radiale de la température et de la densité entre la chromosphère et la couronne (modèle numérique).

Le terme  $Q_{ray}$  décrit la perte d'énergie interne par émission de rayonnement suite à l'excitation collisionnelle des ions présents dans le milieu par les électrons, d'où sa proportionnalité au produit  $n_e n_H$ . Des hypothèses sont faites sur les abondance d'espèces ionique par atome d'hydrogène et sur les probabilités d'excitation, toutes choses fonctions de la température, qui sont prise en compte dans le facteur  $\Lambda(T)$ . Il n'existe pas d'expression simple pour  $\Lambda(T)$ , mais différents modèles, dont un est illustré sur la Fig.2. Le point important n'est pas tant la fonction précise que le fait que ces fonctions présentent un maximum (aux alentours de  $\sim 10^5$  K). Au dessus d'une certaine température le refroidissement perd en efficacité, on a donc un effet d'emballement. C'est la raison physique de l'existence de la région de transition.

Pour évaluer le terme de conduction, nous considérons une loi de type Fourier

$$\mathbf{j}_{th} = -\kappa \nabla T \quad (6)$$

où nous utilisons pour  $\kappa$  l'expression dite de Spitzer-Braginskii (SB),

$$\kappa = K_0 T^{5/2}, \quad \text{avec } K_0 \simeq 5,6 \times 10^{-12} \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-7/2} \quad (7)$$

valable dans un plasma totalement ionisé (les collisions sont des déviations coulombiennes de petits angles). Il est à noter que l'utilisation de cette expression pour la conduction thermique fait débat (cf plus bas) car il n'est pas évident que le libre parcours moyen des

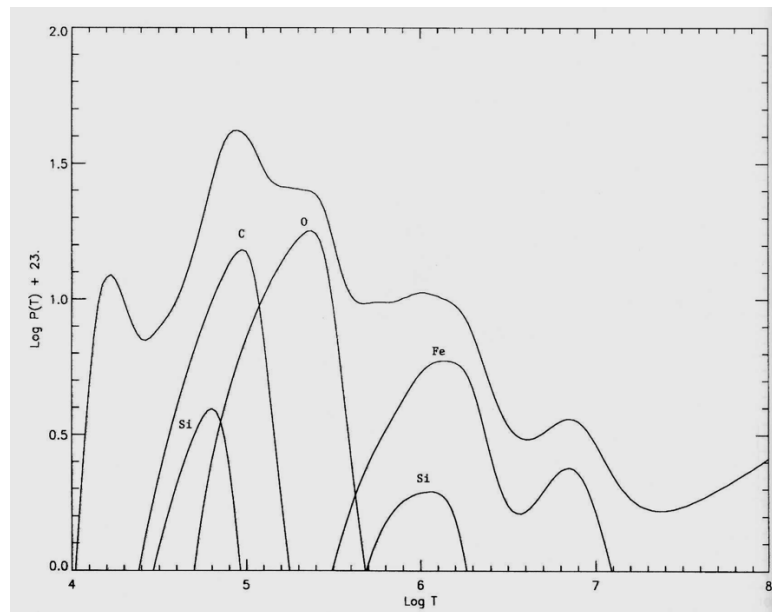


FIGURE 2 – Abscisses : log de la température en K. Ordonnées log de la fonction de refroidissement radiatif  $\Lambda(T)$  (ici notée  $P$ ) dans la couronne solaire, en  $\text{erg.cm}^3.\text{s}^{-1}$ . Rappel,  $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$ . Il faut donc multiplier par un facteur  $10^{-13}$  pour convertir en unités SI [ $\text{W.m}^3.\text{s}^{-1}$ ]. Les émissions de différentes raies atomiques, utilisées pour le calcul de  $\Lambda$  sont représentées.

particules soit suffisamment faible devant les échelles de gradient pour que celle-ci soit parfaitement valable.

Une évaluation en ordre de grandeur montre que

$$\frac{\text{div } \mathbf{j}_{th}}{Q_{ray}} \sim \frac{K_0 T^{7/2} L^{-2}}{n_e^2 \Lambda(T)} \ll 1 \quad (8)$$

pour les conditions typiques de la chromosphère (cf. fig.1), qui est un milieu "dense" et "froid", dans lequel le transfert radiatif domine. A la base de la région de transition, la température est donc déterminée par un équilibre entre le terme d'injection d'énergie et le terme de refroidissement radiatif :  $Q_c \simeq Q_{ray}$ , et la température locale est obtenue en inversant la fonction  $\Lambda$ ,

$$\Lambda(T) \simeq \frac{Q_c}{n_e^2} \quad (9)$$

Or l'atmosphère proche de la surface solaire est (à peu près) exponentiellement stratifiée par la gravité,  $n_e \simeq n_0 \exp(-z/H)$  où  $z$  est l'altitude et  $H \sim kT/mg$  l'échelle de hauteur : plus on s'élève moins le nombre de particules capable de rayonner de l'énergie est important. Quand le terme  $Q_c/n_e^2$  devient supérieur à  $\Lambda_{max} \sim 10^{-35} \text{ W.m}^3.\text{s}^{-1}$  le plasma n'est plus assez dense pour rayonner l'énergie injectée  $Q_c$  : la température augment brutalement.

Il est intéressant de noter que ce phénomène est peu dépendant de la quantité d'énergie  $Q_c$  injectée. A partir du moment où une quantité finie d'énergie est injectée, étant donnée la nature exponentielle de la stratification de la densité, on trouvera une altitude où l'instabilité thermique se développera. On peut d'ailleurs facilement calculer la densité critique à laquelle l'instabilité se produit :

$$n_e \simeq \left( \frac{Q_c}{\Lambda_{max}} \right)^{1/2} \sim \left( \frac{Q_c}{1 \text{ W.m}^{-3}} \right)^{1/2} 10^{17} \text{ m}^{-3} \quad (10)$$

On voit qu'un taux de chauffage de l'ordre du  $1 \text{ W.m}^{-3}$  est cohérent avec les observations.

### 2.3 Stabilisation par conduction

La température augmente donc dans la région de transition, et ne se stabilise qu'à un niveau auquel la conduction thermique (qui augmente en  $T^{5/2}$ ) devient suffisante pour stabiliser le gradient de température. Nous pouvons reprendre l'évaluation en ordre de grandeur (8), et effectivement constater qu'à la suite de la hausse de température et de la diminution de la densité nous nous retrouvons, juste au dessus de la région de transition, dans les conditions d'un plasma dilué et chaud ( $n \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$  et  $T \sim 10^6 \text{ K}$ ), pour lesquelles  $\text{div } \mathbf{j}_{th} > Q_{ray}$ . Nous pouvons obtenir un ordre de grandeur de la température coronale en négligeant totalement le refroidissement radiatif,

$$T_{couronne} \simeq \left( \frac{L^2}{K_0} Q \right)^{2/7} \sim \left( \frac{Q_c}{1 \text{ W.m}^{-3}} \right)^{2/7} 10^6 \text{ K} \quad (11)$$

où on a pris pour  $L$  l'échelle extrêmement courte de gradient de la zone de transition  $L \sim 100$  km. La encore  $Q_c \sim 1 \text{ W.m}^{-3}$  est cohérent avec les températures mesurées. De plus le faible exposant  $2/7$  fait que la température coronale est peu sensible à la valeur exacte de  $Q$ , un facteur 100 de différence sur  $Q_c$  ne produisant qu'un facteur  $\sim 3$  sur  $T_{\text{couronne}}$ . Le modèle est simpliste, mais il permet d'obtenir les ordres de grandeur corrects.

## 2.4 D'où vient l'énergie ?

La question qui se pose évidemment, c'est : que représente  $Q_c$  ? Nous voyons que ce terme doit exister, l'existence de l'instabilité thermique de la région de transition en est la manifestation visible. Le bilan d'énergie à l'échelle plus globale de la couronne montre aussi que  $Q_c$  doit être non-nul au dessus de la région de transition. Les arguments développés au dessus nous donnent aussi un ordre de grandeur  $\sim 1 \text{ W.m}^{-3}$ . Mais il reste à identifier quel effet physique est à l'origine de cette déposition de chaleur dans le plasma, et quelle est la source de l'énergie. L'identification de ce terme constitue le problème dit de "chauffage de la couronne solaire". C'est un des problèmes ouverts de la physique solaire. Un très grand nombre de modèles a été proposé, on peut les classer en deux grandes catégories :

- Dissipation d'ondes (modèles AC) : l'idée est que des ondes acoustiques ou magnéto-acoustiques sont excitées les mouvements de convection au niveau de la surface solaire. Ces ondes augmentent en amplitude avec l'altitude, et se brisent en ondes de choc dans lesquelles elles peuvent efficacement transmettre une partie de leur énergie au plasma.
- Reconnexion magnétique (modèles DC) : l'idée est que les pieds des tubes de flux magnétiques pris dans le plasma très dense de la photosphère subissent des mouvements aléatoires liés, là encore, aux mouvements convectifs sous la surface solaire. Les tubes de flux à plus haute altitude vont donc s'emmêler, se torsader, générer de fortes couches de courants et du chauffage par effet Joule.

Dans tous les cas le réservoir d'énergie se trouve dans les mouvements de convection sous la surface solaire. Toute la recherche sur le sujet consiste à comprendre comment par quel canal cette énergie mécanique pourra se transporter et se dégrader en énergie thermique dans la couronne.

## 2.5 Collisionnalité, nombre de Knudsen

Le modèle décrit précédemment fait jouer un rôle central au phénomène de conduction thermique, que nous avons décrit dans l'approximation de Spitzer-Braginskii. Celle-ci se justifie bien si le nombre de collisions coulombiennes subies par un électron sur l'échelle

typique de gradient de température est grand :

$$K_n = \frac{\ell_{lpm}}{L} \ll 1 \quad (12)$$

où  $K_n$  est le nombre de Knudsen. Cherchons à estimer  $K_n$  pour les paramètres typiques de la basse atmosphère solaire. Le libre parcours moyen d'une particule de vitesse  $v$  vaut  $\ell_{lpm} = v/\nu_c$ , où la fréquence de collision coulombienne est donnée par

$$\nu_c(v) = \frac{4\pi n_e e^4 \ln \Lambda_c}{(4\pi\epsilon_0)^2 m_e^2 v^3} \quad (13)$$

$\ln \Lambda_c$  est ici le logarithme coulombien  $\ln \Lambda_c \simeq \ln(12\pi n_e \lambda_d^3) \sim 20$  pour les conditions de la zone de transition et de la couronne. Pour une distribution de vitesses Maxwellienne, on obtient

$$\ell_{lpm} = 8,9 \times 10^7 \frac{T_e^2}{n_e \ln \Lambda_c} \text{ m}, \quad (14)$$

dont l'application donne, dans la chromosphère  $\ell_{lpm} \sim 3$  mm, qui est évidemment très petite devant toutes les échelles en jeu. Dans la couronne :  $\ell_{lpm} \sim 10^8$  m, soit  $\sim 0.1 R_s$  où  $R_s$  est le rayon solaire : on est dans un milieu peu collisionnel. Dans la région de transition (RT) en prenant les valeurs intermédiaires de densité et températures, on obtient  $\ell_{lpm} \sim 1$  km, qu'il faut comparer à l'échelle typique du gradient, elle-même très petite, pour obtenir le nombre de Knudsen de la RT

$$K_{n,RT} = \frac{\ell_{lpm}}{L} \sim 10^{-2}. \quad (15)$$

Ce nombre pose la question de la validité du coefficient de conduction  $\kappa$ . Il y a débat sur le sujet, mais des approches (en particulier numériques) semblent montrer que  $K_n < 10^{-3}$  est une condition nécessaire à la validité de l'approximation SB. La raison de la non-validité de l'approximation réside largement dans la dépendance en  $v$  de  $\nu_c$  (13) : quelle que soit la distribution de vitesse (si elle n'est pas sur support borné), il existera des particules qui se comporteront de manière non-collisionnelle. En effet, le nombre de Knudsen dépend fortement de la vitesse de la particule considérée :

$$K_n(v) \simeq \frac{v}{\nu_c(v)L} \simeq \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 m_e^2}{4\pi e^4 \ln \Lambda_c} \frac{v^4}{n_e L} \simeq 6,2 \times 10^{-8} \frac{v^4}{n_e L} \quad (16)$$

Qu'on peut estimer, en introduisant la vitesse thermique des électrons  $v_{th} = \sqrt{kT/m_e}$ , et pour des paramètres typiques de la zone de transition,

$$K_n(v) \sim 10^{-2} \left( \frac{v}{v_{th}} \right)^4 \quad (17)$$



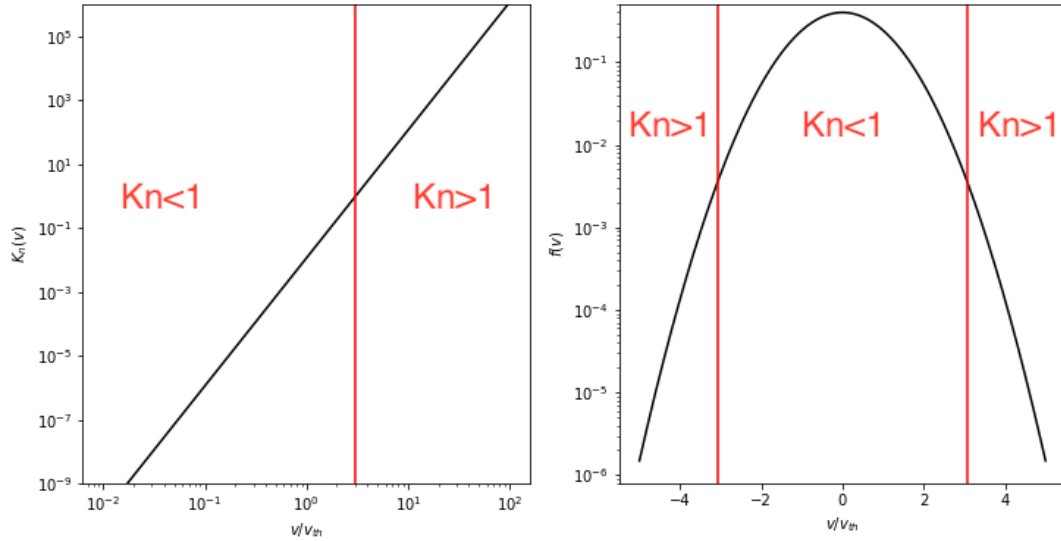


FIGURE 3 – Nombre de Knudsen en fonction de  $v/v_{th}$  (gauche) et fonction de distribution Maxwellienne avec les limites de "collisionnalité". On voit que les particules au delà de trois vitesses thermiques ne subissent plus de collisions sur l'étendue de la RT.

## 2.6 Modèle balistique : filtrage gravitationnel des vitesses

La non-collisionnalité des particules les plus énergétiques peut avoir des effets inattendus, et en particulier créer des inversions de températures avec l'altitude sans le moindre apport d'énergie ou de chaleur extérieure (les distributions de particules à la base de la région de transition étant données).

Supposons une distribution de particules Maxwellienne en  $z = 0$ . La fonction de distribution (réduite, i.e. intégrée sur les deux directions perpendiculaires à l'axe  $z$  pris selon la verticale) à des altitudes plus élevées est donnée par

$$f_M(v) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi kT/m}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right). \quad (18)$$

Les termes dépendant de la position et de la vitesse sont séparés, et la température est donc indépendante de l'altitude. On a donc une atmosphère isotherme, dont la densité change exponentiellement avec l'altitude suivant la loi

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right). \quad (19)$$

où l'échelle de hauteur est donnée par  $H = kT/mg$ .

Supposons maintenant une fonction de distribution 'non-thermique' à la base de la région de transition, caractérisée par un excès de particules de hautes énergies par rapport

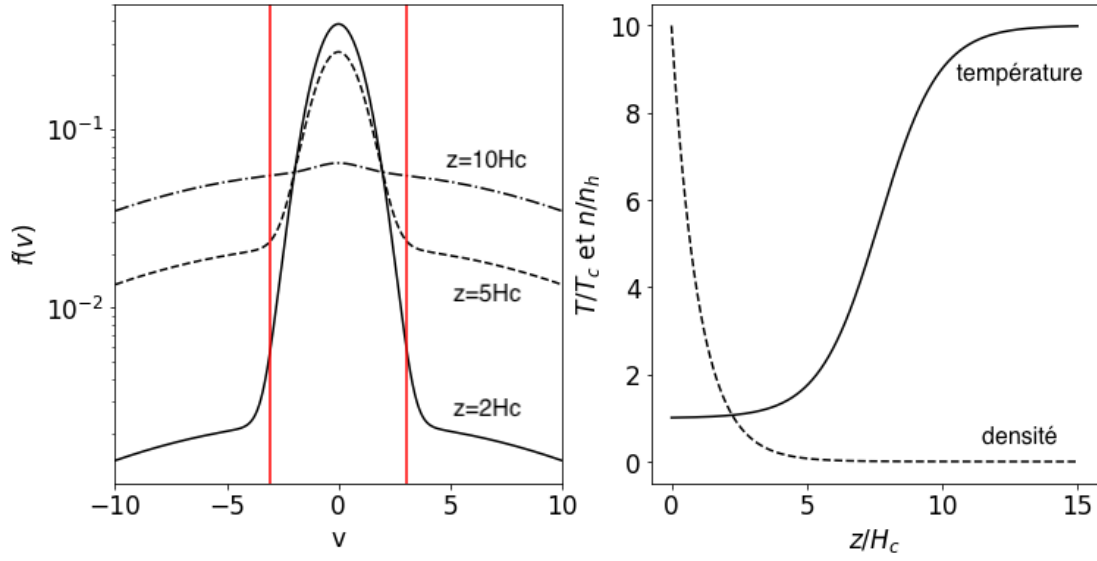


FIGURE 4 – Fonction de distribution avec queues non-thermiques (gauche) et évolution de la densité et de la température avec l'altitude (droite).

à la distribution de Maxwell. Un modèle très simple d'une telle distribution est une somme de deux Maxwelliennes, une de température  $T_c$  et de densité  $n_c$ , et l'autre de température  $T_h \gg T$  et de densité  $n_h \ll n$ . La densité totale vaut  $n = n_c(z) + n_h(z)$  et la température totale est définie par la variance des vitesses des particules

$$T = \frac{m \langle v^2 \rangle}{k} = \frac{n_c T_c + n_h T_h}{n_c + n_h} \quad (20)$$

Dans un modèle sans aucune collision, où les particules suivent des trajectoires balistiques dans le champ de pesanteur solaire, l'évolution des densités de chacune des deux populations de particules est donnée, par (19), où chaque population est caractérisée par une échelle de hauteur différente. La température (plus exactement ici la variance des vitesses) évolue donc avec l'altitude

$$T(z) = \frac{n_{c0} T_c \exp(-z/H_c) + n_{h0} T_h \exp(-z/H_h)}{n_{c0} \exp(-z/H_c) + n_{h0} \exp(-z/H_h)} \quad (21)$$

La figure 4 montre un exemple de l'évolution de température et densité pour une fonction de distribution avec des queues non-thermiques. On observe une caractéristique de l'effet de filtrage en vitesse : les densités et températures sont anti-corrélées (ce qui correspond à un indice polytropique inférieur à 1). On peut le comprendre facilement : les particules les plus énergétiques vont plus haut. Ainsi, au delà de quelques échelles de hauteur de la population de plus faible température, il ne reste plus que les particules les plus énergétiques, qui sont aussi les moins collisionnelles. Les particules moins éner-

gétiques ont été "filtrées".

Le modèle présenté dans cette partie est simplifié dans la mesure où il ne prend en compte que le potentiel gravitationnel dans lequel évoluent les particules. Un modèle plus complet prendrait aussi en compte un potentiel plus complexe, mais l'idée fondamentale est celle qui est illustrée ici. On peut montrer que lorsque le potentiel est attractif la température augmente, alors que s'il est répulsif elle diminue.

On voit que le filtrage en vitesse permet de reproduire le brusque saut de température de la zone de transition. Cependant il laisse ouverte la question de la formation de la population suprathermique et de son entretien dans un milieu aussi collisionnel que la chromosphère. Il pose d'une manière un peu différente le problème du chauffage : il en faut toujours un, mais il s'agit à présent de chercher un processus capable d'injecter préférentiellement de l'énergie dans les particules de haute énergie. Des mécanismes d'interaction ondes-particules par exemple.

## 2.7 Bibliographie

### Chauffage de la couronne :

- Dynamics of the Quiescent Solar Corona, R. Rosner, W.H. Tucker and G.S. Vaiana, The Astrophysical Journal, 220 :643-665, 1978.
- The Properties of the Solar Corona and Its Connection to the Solar Wind, S.R. Cranmer and A.R. Winebarger, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 57, 2019.

### Transport thermique dans les plasmas :

- Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas, Spitzer L. and R. Härm, Phys Rev, 89, 1953.
- Transport processes in a plasma, Braginskii, S. I., Reviews of plasma physics 1 : 205, 1965

### Filtrage gravitationnel :

- On the Causes of Temperature Change in Inhomogeneous Low-Density Astrophysical Plasmas, J.D. Scudder, Astrophysical Journal v.398, p.299, 1992
- Why All Stars Should Possess Circumstellar Temperature Inversions, J.D. Scudder, Astrophysical Journal v.398, p.319, 1992

## 3 Le vent solaire

Nous examinons dans cette partie une conséquence de l'existence d'une couronne de très haute température : l'évaporation de cette couronne dans le milieu interplanétaire sous la forme d'un vent de plasma en expansion supersonique, le vent solaire.

### 3.1 Le problème d'une couronne statique

On considère ici la possibilité du maintien d'une atmosphère solaire statique aux hautes altitudes. L'équation décrivant le plasma est (cf. eq.(2))

$$\frac{dp}{dr} = -n \frac{mMG}{r^2} = -p \frac{mMG}{kTr^2} \quad (22)$$

d'où on tire la pression en fonction de la distance  $r$  au centre du soleil,

$$p(r) = p(r_0) \exp \left( -\frac{mMG}{k} \int_{r_0}^r \frac{dr}{T(r)r^2} \right), \quad (23)$$

qui exprime la relation entre les profils de pression et de température dans un champ de gravité. On voit en particulier que pour avoir une pression nulle à l'infini (donc une atmosphère entièrement confinée par la gravité), il faut que la température décroisse plus vite que  $T(r) \sim r^{-1}$ . Dans un milieu aussi thermiquement conducteur qu'un plasma totalement ionisé, un profil aussi raide est peu envisageable.

Le profil  $T(r)$  peut être estimé (au moins en ordre de grandeur) en supposant qu'il est déterminé essentiellement par la conductivité thermique. On peut reprendre l'eq.(3) en régime permanent,

$$\text{div}(-\kappa(T)\nabla T) = Q \quad (24)$$

qui, intégrée sur un volume compris entre deux sphères de rayon  $r_0$  et  $r$ , en en faisant l'hypothèse d'une symétrie sphérique, donne

$$-4\pi r^2 \kappa(T) \frac{dT}{dr} + 4\pi r_0^2 \kappa(T_0) \frac{dT}{dr} \Big|_{r_0} = \int_{r_0}^r Q(r) 4\pi r^2 dr \quad (25)$$

soit, de manière plus compacte

$$\Phi(r) - \Phi(r_0) = P(r, r_0) \quad (26)$$

où  $\Phi(r)$  est la puissance transportée par conduction à travers une sphère de rayon  $r$ , et  $P(r, r_0)$  la puissance déposée localement via le terme  $Q$  entre le rayon  $r_0$  et le rayon  $r$ . On peut obtenir le profil de température en imposant une condition à la limite  $r \rightarrow \infty$  (on prend  $T(r \rightarrow \infty) = 0$ ), en explicitant la conductivité  $\kappa(T)$  (on prend l'expression SB eq.(7),  $\kappa = K_0 T^{5/2}$ ). On obtient

$$T^{7/2}(r) = \frac{7\Phi_0}{8\pi K_0 r} + \int_r^\infty \frac{7P(r, r_0)}{8\pi K_0 r^2} dr. \quad (27)$$

Cette équation permet de discuter du profil de température : on voit en négligeant le terme local que la conduction thermique vers l'extérieur induit un profil en  $T(r) \propto r^{-2/7}$ , qui décroît donc bien moins vite que  $T(r) \propto r^{-1}$  nécessaire au confinement gravitationnel de la couronne d'après l'eq.(23). Une estimation du terme de puissance montre qu'il sera

nécessairement négligeable devant  $\Phi_0$  au bout d'une certaine distance.

Ces arguments nous font voir que le confinement de l'atmosphère par la seule gravité solaire est donc impossible : une atmosphère statique aura nécessairement une pression  $p_\infty$  non-nulle à l'infini, et l'équilibre statique ne pourra être assuré que via l'existence d'un milieu "confinant" ayant au moins cette pression. Le milieu en question pourrait être le milieu interstellaire. La pression de celui-ci vaut  $p_{is} \simeq 10^{-14}$  Pa. Calculons la pression à l'infini pour un profil de température de la forme  $T = T_0(r/r_0)^{-\alpha}$  (où  $\alpha = 2/7$  dans l'hypothèse du profil assuré par la conduction SB). Le calcul de l'intégrale (23) donne

$$p_\infty = p(r_0) \exp\left(-\frac{mMG}{kT_0} \frac{1}{r_0(1-\alpha)}\right) \simeq p(r_0) \exp\left(-\frac{10^7 \text{ K}}{T_0(1-\alpha)}\right), \quad (28)$$

qui nous permet d'exprimer la condition d'une atmosphère statique sous la forme d'une condition sur la température sur la couronne. En notant que la pression à la base de la couronne est de l'ordre de  $p(r_0) = 2nkT_0 \sim 3 \times 10^{-5}$  Pa, on obtient

$$(1-\alpha)T_{stat} \sim \frac{10^7}{\ln(p(r_0)/p_{is})} \sim 5 \times 10^5 \text{ K} \quad (29)$$

Ainsi la température élevée de la couronne, due à l'instabilité thermique de la région de transition, associée à la forte conduction thermique du plasma, rend impossible un confinement de l'atmosphère par le milieu interstellaire.

A noter que l'impossibilité du confinement n'est pas dû qu'à la forte température coronale. En effet atmosphère à plusieurs millions de Kelvins pourrait être confinée si le gradient de température était à peine plus élevé qu'il ne l'est, c'est-à-dire si la conduction thermique était à peine moins efficace. On voit par exemple d'après (29) qu'une couronne à 1 MK serait confinée avec un indice  $\alpha \simeq 3/5$ .

### 3.2 Modèle de Parker

Si l'atmosphère ne peut être statique, eh bien, elle doit donc être dynamique (eh oui). Etudions donc un modèle qui modélise le plasma coronal sans négliger sa vitesse moyenne  $\mathbf{u}$ . Un tel modèle (tout comme le constat de l'impossibilité du confinement statique) a été fait en 1958 par Eugène N. Parker (c'est-à-dire un an avant le lancement de la première sonde spatiale à avoir mesuré le plasma du vent solaire), nous décrivons ici le modèle auquel il a donné son nom.

Nous considérons un plasma constitué d'électrons et de protons. Le système étant supposé de symétrie sphérique, avec le soleil au centre, on considérera que les grandeurs physiques ne dépendent que de la coordonnée  $r$ . On considère aussi que le champ des vitesses est purement radial,  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r$ . En régime stationnaire, les équations d'évolution

des densités et des composantes radiales des vitesses moyennes électroniques et ioniques sont données par les équations fluides (1) et (2) :

$$\frac{d}{dr} (r^2 n_e u_e) = 0, \quad \frac{d}{dr} (r^2 n_p u_p) = 0 \quad (30)$$

et

$$n_e m_e u_e \frac{d}{dr} u_e = -\frac{dp_e}{dr} - en_e E - n_e m_e \frac{GM}{r^2} \quad (31)$$

$$n_p m_p u_p \frac{d}{dr} u_p = -\frac{dp_p}{dr} + en_p E - n_p m_p \frac{GM}{r^2} \quad (32)$$

Nous avons négligé ici les effets d'une possible composante radiale de la force de Laplace  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ . On peut pour le justifier considérer que les lignes de champ magnétiques sont elles aussi radiales.

En supposant que la densité de charge  $\rho = e(n_p - n_e)$  est partout proche de zéro (hypothèse d'électro-neutralité du plasma), et que la composante radiale de la densité de courant  $j_r = en_p u_p - en_e u_e$  est elle aussi partout nulle (le soleil ne se charge pas), nous avons :

$$n_e \simeq n_p \simeq n \quad \text{and} \quad u_e \simeq u_p \simeq u. \quad (33)$$

En additionnant les équations d'évolution des moments et en négligeant  $m_e$  devant  $m_p$ , on obtient l'équation d'évolution de  $u$  :

$$nm_p u \frac{d}{dr} u = -\frac{d}{dr} (nk(T_e + T_p)) - nm_p \frac{GM}{r^2} \quad (34)$$

Pour poursuivre, nous avons besoin d'une *équation de fermeture* des équations fluides, c'est-à-dire d'une relation liant le moment fluide de plus grand ordre (ici la pression  $p$ ) aux moments d'ordres inférieurs. En suivant le premier article de Parker sur le sujet, nous choisissons la plus simple, et considérons que les températures électroniques et ioniques sont indépendantes de  $r$  (expansion isotherme) dans la région d'accélération du vent, c'est-à-dire entre la zone de transition et quelques rayons solaires. Cette hypothèse est justifiée par la grande conductivité thermique du plasma, qui, comme on l'a vu, réduit fortement le gradient de température.

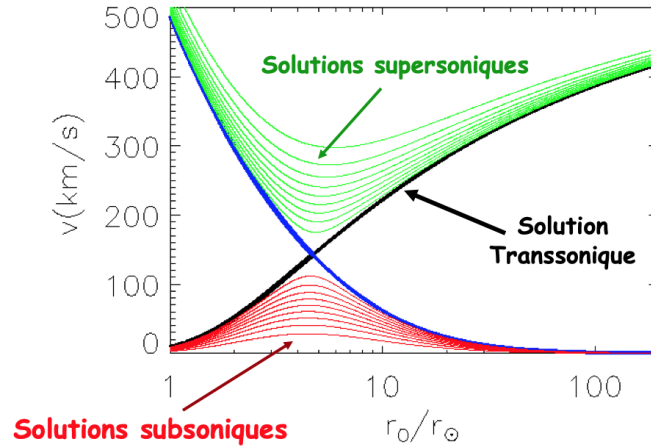
On peut alors mettre (34), en utilisant l'équation de continuité pour éliminer la densité  $n$ , sous la forme :

$$(u^2 - c_s^2) \frac{1}{u} \frac{d}{dr} u = \frac{2c_s^2}{r} \left(1 - \frac{r_c}{r}\right) \quad (35)$$

où on a introduit la vitesse du son  $c_s^2 = k(T_e + T_p)/m_p$  et le *rayon critique*  $r_c = GM/2c_s^2$ .

Cette équation s'intègre par séparation de variables :

$$\frac{u^2}{2} - c_s^2 \ln u = 2c_s^2 \ln r + 2c_s^2 \frac{r_c}{r} + C \quad (36)$$

FIGURE 5 – Différentes familles de solutions illustrées dans le plan  $(u, r)$ 

où  $C$  est la constante d'intégration. La valeur de  $C$  détermine le comportement de la solution. On a deux familles de solutions (cf. fig.5) : (i) des solutions supersoniques, vérifiant  $u > c_s$  pour tout  $r$  et dont le profil de vitesse à un minimum en  $r = r_c$ . Ces solutions ont déjà une vitesse très élevées au niveau de la zone de transition et ne sont donc pas d'intérêt pour le problème d'expansion que nous cherchons à traiter. (ii) des solutions subsoniques, vérifiant  $u < c_s$  pour tout  $r$  et dont le profil de vitesse passe par un maximum en  $r = r_c$ . On voit, d'après eq.(35) que pour ces solutions vérifiant  $u \sim r^{-2}$  quand  $r \rightarrow \infty$ . D'après l'équation de continuité on a donc  $n \sim 1/(r^2 u) = \text{cste}$  quand  $r \rightarrow \infty$ . Ces solutions sont donc caractérisées par une densité et une pression non-nulle à l'infini, et par la nécessité d'un milieu confinant. Elles ne sont pas pour autant exclues physiquement, et un débat avait d'ailleurs lieu sur le fait qu'elles soient physiquement réalisées, avant les premières mesures spatiales.

Ces dernières ont montré que la solution réalisée est précisément la solution "limite", dont Parker avait eu l'intuition, entre les deux familles pré-citées : la solution *transsonique*, de vitesse faible proche du soleil, de vitesse supersonique aux grandes distances, pour laquelle on a  $u(r_c) = c_s$ , qui est une condition pour que la dérivée de  $u$  ne s'annule pas en  $r = r_c$ .

La condition  $u(r_c) = c_s$  nous permet de déterminer la valeur de la constante  $C$  pour le cas transsonique. On obtient  $C = -c_s^2(3/2 + \ln c_s + 2 \ln r_c)$ , et l'équation (36) se met sous la forme adimensionnée

$$\frac{u^2}{2c_s^2} - \ln \frac{u}{c_s} = \ln \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 + \frac{2r_c}{r} - \frac{3}{2}, \quad (37)$$

qui peut être utilisée pour étudier le comportement asymptotique de la solution. En particulier nous voyons que pour  $r \gg r_c$ ,  $u \sim 2c_s \sqrt{\ln(r/r_c)}$  : l'expansion isotherme, pour

des raisons énergétiques, ne peut donc pas être entretenue très loin du soleil.

En supposant les températures électroniques et ioniques égales juste au dessus de la RT, on a l'estimation suivante du rayon critique ( $R_s \simeq 7 \times 10^8$  m est le rayon solaire),

$$r_c \simeq \frac{GMm_p}{4kT} \simeq 5.8 \left( \frac{10^6 \text{ K}}{T} \right) R_s \quad (38)$$

On voit donc que plus la température est élevée en sortie de la RT, plus le rayon critique sera proche du soleil. En pratique, la température coronale est de l'ordre du million de degrés et  $r_c \sim 5R_s$  : il faut donc que la conductivité thermique maintienne un gradient de température faible sur quelques rayons solaire pour justifier l'hypothèse isotherme. A noter que cette hypothèse n'est de toutes façons pas cruciale dans l'existence du vent. Un calcul similaire à celui réalisé dans cette section peut être conduit pour le cas plus général d'une équation de fermeture polytrophe, du type  $d(pn^{-\gamma}) = 0$  où  $\gamma$  est l'indice polytrophe (égal à 1 pour le cas isotherme, égal à 5/3 pour le cas adiabatique).

Pour une première estimation de la vitesse du vent à la sortie de la zone d'accélération, nous pouvons utiliser l'estimation  $u \sim 2c_s \sqrt{\ln(r/r_0)}$ . La racine du logarithme variant très lentement pour des grands arguments, on peut prendre par exemple à  $10 R_s$ ,  $\sqrt{\ln(10)} \sim 1.5$ , soit

$$u_\infty \simeq 3 \left( \frac{2kT}{m_p} \right)^{1/2} \simeq 385 \left( \frac{T}{10^6 \text{ K}} \right)^{1/2} \text{ km.s}^{-1} \quad (39)$$

Ce modèle reproduit en ordre de grandeur les vitesses observées, en particulier dans le vent lent. Il ne résout pas, par contre, le problème du vent rapide, issu des trous coronaux (caractérisés par des lignes de champ magnétiques ouvertes), qu'on mesure à près de  $800 \text{ km.s}^{-1}$ . Il faudrait pour expliquer de telles accélérations une température coronale  $T \sim 5 \text{ MK}$ , qui est loin d'être observée (d'autant plus loin que les trous coronaux sont des régions globalement plus froides que le reste de la couronne).

### 3.3 Flux de masse

On peut s'appuyer sur le modèle de Parker pour dériver une grandeur caractéristique particulièrement intéressante, qui est le flux de masse du vent solaire : quel fraction de la masse de l'étoile s'évapore-t-elle par unité de temps ? Le flux de masse  $\dot{M} = 4\pi r^2 n m_p u = \text{cste}$  d'après l'équation de continuité.

L'équation (37) nous donne  $\dot{M}$ , en nous permettant d'estimer la vitesse du vent dans les couches basses de la couronne, dont on sait qu'elle est très petite devant  $c_s$ . On peut donc négliger le terme en  $u^2/c_s^2$  devant le terme en log. On obtient

$$u(r \rightarrow 0) \simeq c_s \left( \frac{r_c}{r} \right)^2 \exp \left( -\frac{2r_c}{r} + \frac{3}{2} \right) \quad (40)$$



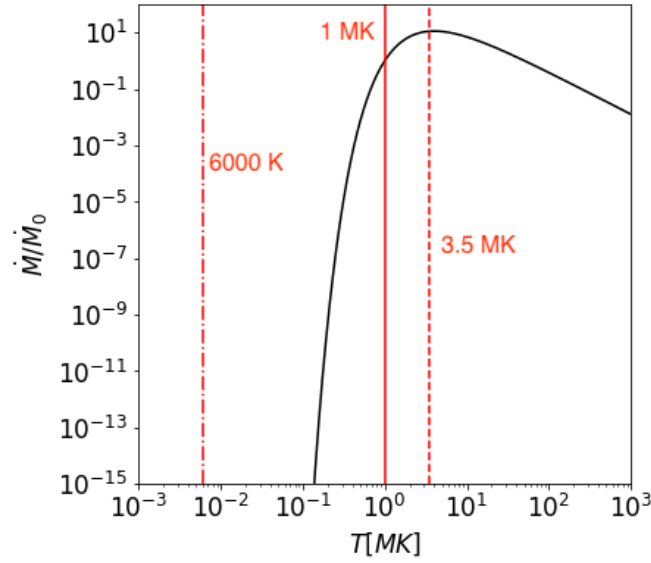


FIGURE 6 – Flux de masse en fonction de la température coronale. La température pour lequel le maximum est atteint est indiquée par les pointillés. La température de la photosphère est indiquée à titre indicatif.

et donc

$$\dot{M} \simeq 4\pi n_0 m_p c_s r_c^2 \exp\left(-\frac{2r_c}{R_s} + \frac{3}{2}\right) \quad (41)$$

où on a négligé la distance entre la surface solaire et le haut de la région de transition. L'expression de  $r_c$  (eq.38) nous permet d'estimer le flux de masse en fonction de la température de la couronne,

$$\dot{M} \sim 10^{13} \left(\frac{T}{10^6 \text{ K}}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{11 \cdot 10^6 \text{ K}}{T}\right) \text{ kg.s}^{-1} \quad (42)$$

On peut d'une part commenter l'ordre de grandeur  $\dot{M} \sim 10^8 \text{ kg.s}^{-1}$  qui, s'il est impressionnant, reste assez faible comparé aux échelles solaires. La masse solaire est  $M \sim 10^{30} \text{ kg}$ , l'échelle de temps sur laquelle cette évaporation aurait un effet important est de  $\tau_M = M/\dot{M} \sim 240000$  milliards d'années, quand l'âge estimé du système solaire est de 5 milliards d'années.

D'autre part on peut noter l'extrême sensibilité de ce flux de masse, via le facteur exponentiel, à la température de la couronne, illustrée sur la figure 6. Si l'atmosphère solaire était à la température photosphérique d'environ 6000 K, le flux de masse serait divisé par un facteur  $\sim 10^{430}$ . Cela montre bien l'importance déterminante que joue l'instabilité de la région de transition dans l'existence d'un vent solaire.

### 3.4 Clôtures polytropes, conditions d'existence du vent solaire.

L'écoulement du vent solaire décrit par (34) est potentiel (on a négligé tout terme de viscosité). Cela se traduit par l'existence d'une intégrale pour cette équation, qu'on peut calculer par exemple en évaluant la variation d'énergie mécanique d'une particule sous l'effet du travail des forces de pression :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} \left( \frac{mu(r)^2}{2} - \frac{Gm_p M}{r} \right) = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{n} \frac{dp}{dr} dr = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{n} \quad (43)$$

où  $p = p_p + p_e$ .

On voit que le membre de droite de cette équation (le travail des forces de pression) dépend entièrement du choix de la relation de fermeture choisie pour les équations fluides. Pour la clôture isotherme étudiée précédemment, on obtient l'intégrale

$$\frac{u(r)^2}{2} + \frac{k(T_p + T_e)}{m} \ln(n) - \frac{GM}{r} = \mathcal{E} \quad (44)$$

Où  $\mathcal{E}$  est une énergie par unité de masse. On peut exprimer  $n$  dans cette équation en utilisant l'équation de continuité (on introduit le flux de particules  $F = \dot{M}/4\pi m_p$ )

$$\frac{u^2}{2} - c_s^2 \ln u = 2c_s^2 \ln r - c_s^2 \frac{2r_c}{r} + \mathcal{E} - \ln F \quad (45)$$

qui est évidemment identique à l'équation (36) où la constante d'intégration  $C \equiv \mathcal{E} - \ln F$ . On a étudié les propriétés de cette équation dans les sections précédentes. Et vu entre autre que l'hypothèse isotherme présentait le défaut d'une vitesse divergente à l'infini.

On peut généraliser un peu le traitement en considérant d'autres relations de fermetures. Un choix possible est celui de relation empiriques dites polytropes, reliant pression et densité sous la forme

$$\frac{d}{dr} (pn^{-\alpha}) = 0, \quad (46)$$

où  $\alpha$  est l'indice polytrophe. On voit que le choix de  $\alpha = 1$  correspond à une fermeture isotherme, tandis que  $\alpha = c_p/c_v = \gamma = 5/3$  correspond à une fermeture adiabatique - c'est-à-dire sans apport de chaleur dans le plasma (exercice : vérifier-le à l'aide de l'équation de conservation de l'énergie eq.3). L'éq.(46) permet de calculer explicitement le terme d'enthalpie (membre de droite de l'eq.43), et d'obtenir l'équation de Bernoulli :

$$\frac{u(r)^2}{2} + \frac{\alpha_e}{\alpha_e - 1} \frac{kT_e(r)}{m_p} + \frac{\alpha_p}{\alpha_p - 1} \frac{kT_p(r)}{m_p} - \frac{GM}{r} = \mathcal{E} \quad (47)$$

L'énergie massique  $\mathcal{E}$  est déterminée par les conditions aux limites, à la base du tube de flux. Nous avons considéré ici la possibilité de relations de fermetures et de profils de température différents pour les fluides d'électrons et de protons, dans la mesure où le faible nombre de Knudsen dans la couronne solaire ne justifie pas un couplage collisionnel

des deux populations à priori.

L'équation de continuité permet, tout comme dans le cas isotherme, d'exprimer l'éq.(47) sous la forme d'une équation liant  $u$  à  $r$ , en exprimant les termes d'enthalpie :

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{kT(r)}{m_p} = Au^{1-\alpha} r^{2-2\alpha}, \quad \text{où } A = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{p_0 n_0^{-\alpha} F^{\alpha-1}}{m_p} \quad (48)$$

Les propriétés de l'équation (47) avec (48) ont été extensivement étudiées par Parker dans le cas où les profils de température électronique et ioniques sont identiques ( $T_e(r) = T_p(r)$ , et donc  $\alpha_e = \alpha_p$ ). On ne reproduira pas cette étude dans le cadre de ce cours, mais on notera le résultat intéressant suivant : une condition d'existence d'un vent transsonique est que  $\alpha < 3/2$ . Au delà de cette valeur, et donc en particulier pour le cas d'intérêt de l'expansion adiabatique  $\alpha = 5/3$ , il n'existe pas de solution critique. Où l'on voit encore une fois l'importance de la conduction thermique dans la production du vent.

L'équation (47) nous permet de discuter des conditions d'existence d'un vent solaire. En effet si les indices  $\alpha > 1$ , nous voyons que densité et température sont corrélées positivement. La diminution de densité  $n \sim r^{-2}$  sera donc accompagnée d'une diminution de température  $T \sim r^{-2(\alpha-1)}$ . On peut donc supposer que les termes d'enthalpie  $\propto T(r)$  dans (47) seront négligeables devant le terme d'énergie cinétique lorsque  $r \rightarrow \infty$ . Nous avons alors

$$\mathcal{E} \simeq \frac{1}{2} m u_\infty^2 \simeq \frac{\alpha_p k T_{p0}}{\alpha_p - 1} + \frac{\alpha_e k T_{e0}}{\alpha_e - 1} - \frac{GMm}{R_s} \quad (49)$$

où la condition  $\mathcal{E} > 0$  est nécessaire (mais pas suffisante) à l'existence d'un vent solaire. Cette expression décrit d'un point de vue énergétique l'accélération du vent solaire : la vitesse terminale de celui-ci est déterminée par l'énergie disponible à la création de forces de pression à la base du tube de flux. Pour avoir un vent solaire, il faut que cette énergie soit suffisante pour permettre aux particules de sortir du puits de potentiel gravitationnel solaire  $-GMm/R_s$ .

La figure 7 montre les possibilités d'existence dans un plan  $(x, \alpha)$ , où le paramètre sans dimension en abscisses  $x = \frac{2kT_0}{m_p} \frac{R_s}{GM} = \frac{R_s}{r_c} = \frac{4c_s^2}{v_{lib}^2}$ . On voit que pour un indice  $\alpha = 1$  correspondant à une évolution isotherme on obtiendra un vent supersonique quel que soit la valeur du paramètre  $x$ , c'est-à-dire même dans le cas  $x \rightarrow 0$  (par contre, comme on l'a vu dans la section sur le flux de masse, il n'y aura pas forcément beaucoup de matière dans ce vent). L'expansion isotherme suppose l'existence d'un thermostat, qui peut fournir de l'énergie en quantité illimitée pour faire fonctionner les forces de pression. Pour des indices  $\alpha > 1$ , correspondant à des injections d'énergie finies dans le plasma, il faut aussi une température finie à la base pour que le vent puisse souffler. Pour des paramètres typiques de la zone de transition, on a  $x \sim 0.3$ . On a donc un indice polytrope maximal  $\alpha \sim 1.4$ .

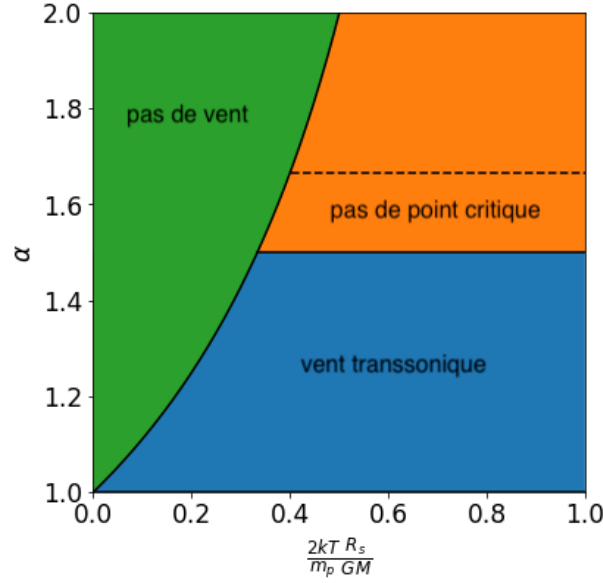


FIGURE 7 – Condition d’existence pour  $T_e = T_p = T$ . Energie thermique normalisée par l’énergie gravitationnelle en abscisse, indice polytrophe en ordonnée. La ligne pointillé montre l’indice adiabatique  $\gamma = c_p/c_v$ .

A noter enfin d’après la forme de l’eq.(49) que si une des populations est adiabatique (les protons par exemple) tandis que l’autre est isotherme (ou d’indice polytrophe  $\alpha < 3/2$ ), le vent pourra exister. Cela peut paraître étrange, dans la mesure où on n’a pas spécifié de mécanisme de couplage entre les populations. Nous verrons plus loin que le responsable de ce couplage est le champ électrique, qui n’apparaît pas explicitement dans les équations, mais qui agit à travers la contrainte d’électro-neutralité.

### 3.5 Flux d’énergie

En étudiant les cas polytropes, nous avons tronqué les équations fluides au deuxième moment, en reliant la pression  $p$  à la densité  $n$ . Cela revient à faire une hypothèse sur l’équation de rang supérieur, qui décrit la conservation de l’énergie. Les équations polytropes, si elles facilitent l’étude analytique du problème, imposent une contrainte forte sur la forme des échanges d’énergie, qui est difficile à justifier physiquement. Pour éviter ce problème il faut prendre en compte l’équation de conservation de l’énergie (comme on l’a fait dans la section décrivant la couronne statique, mais cette fois-ci sans négliger les termes de vitesse)

$$\text{div} \left[ \mathbf{u} \left( nm_p \frac{u^2}{2} + \frac{5}{2} p \right) + \mathbf{j}_{th} \right] = -n\mathbf{u} \cdot \frac{GMm_p}{r^2} \mathbf{e}_r + Q \quad (50)$$

où on a supposé le régime permanent et la symétrie sphérique. On obtient, en intégrant cette équation entre deux sphères de rayon  $r_0$  et  $r$ , et en introduisant  $\dot{M} = 4\pi n m_p u r^2 = \text{cste}$ ,

$$\dot{M} \left[ \left( \frac{u^2}{2} + \frac{5}{2} \frac{kT_p}{m_p} + \frac{5}{2} \frac{kT_e}{m_p} - \frac{GM}{r} \right) \right]_{r_0}^r - \left[ 4\pi r^2 \kappa(T) \frac{dT}{dr} \right]_{r_0}^r = \int_{r_0}^r Q(r) 4\pi r^2 dr \quad (51)$$

ou de manière plus compacte,

$$\dot{M} (\mathcal{E}(r) - \mathcal{E}(r_0)) = -\Phi(r) + \Phi(r_0) + P(r, r_0) \quad (52)$$

où  $\mathcal{E}$  est l'énergie par unité de masse définie dans la partie précédente par l'eq.(47), pour un indice adiabatique  $\alpha_e = \alpha_p = \gamma = 5/3$ .  $\dot{M}\mathcal{E}(r)$  est donc le flux d'énergie du vent solaire.  $\Phi(r)$  est le flux de chaleur à travers la sphère de rayon  $r$  et  $P(r, r_0)$  décrit le bilan local de puissance du plasma (même définitions que dans la section sur la couronne statique).

L'équation (52) relie donc le flux d'énergie du vent solaire aux termes sources que sont le flux de chaleur et l'énergie déposée. En négligeant cette dernière (de manière pragmatique, on n'en connaît pas la forme), et en négligeant le flux de chaleur loin du soleil par rapport à sa valeur dans la couronne  $\Phi_0 \equiv \Phi(r_0)$ , on obtient pour le flux d'énergie du vent solaire pour  $r \rightarrow \infty$

$$\dot{M}\mathcal{E}(r) \simeq \dot{M}\mathcal{E}(r_0) + \Phi_0 \quad (53)$$

qu'on peut aussi exprimer en faisant apparaître la vitesse à l'infini

$$u_\infty^2 = 2\mathcal{H}_0 - u_{lib}^2 + \frac{2}{\dot{M}}\Phi_0 \quad (54)$$

où on a introduit la vitesse de libération du soleil  $u_{lib}^2 = 2GM/R_S \simeq 618 \text{ km.s}^{-1}$ , et l'enthalpie massique  $\mathcal{H}_0 = 5k(T_{p0} + T_{e0})/2m_p$ . Le premier terme représente l'énergie thermique disponible à la base de la couronne, le second la profondeur du puits de potentiel gravitationnel à franchir et le troisième l'énergie injectée par conduction thermique.

Une évaluation des termes en ordre de grandeur, en utilisant la conductivité SB, donne pour les conditions coronales  $\Phi_0 \sim 1.2 \times 10^{19} \text{ W}$ ,  $\dot{M}\mathcal{H}_0 \simeq 0.5 \cdot 10^{19} \text{ W}$  et  $\frac{1}{2}\dot{M}u_{lib}^2 \simeq 2 \cdot 10^{19} \text{ W}$ . On est "juste" en énergie pour avoir un vent loin du soleil ( $u_\infty^2 > 0$ ).

Cependant les ordres de grandeur sont bons. Il faut se rappeler l'extrême sensibilité de  $\dot{M}$ , et donc du flux d'énergie, à la température coronale. Il être instructif de tracer, en utilisant l'expression de  $\dot{M}(T)$  dérivée précédemment pour le cas isotherme, le flux d'énergie total en fonction de la température coronale. On trouve

$$u_\infty^2 \sim 10^{11} \left( \frac{T}{10^6 \text{ K}} - 4 \right) + 5 \cdot 10^8 \left( \frac{T}{10^6 \text{ K}} \right)^5 \exp \frac{6 \cdot 10^6 \text{ K}}{T} \quad (55)$$

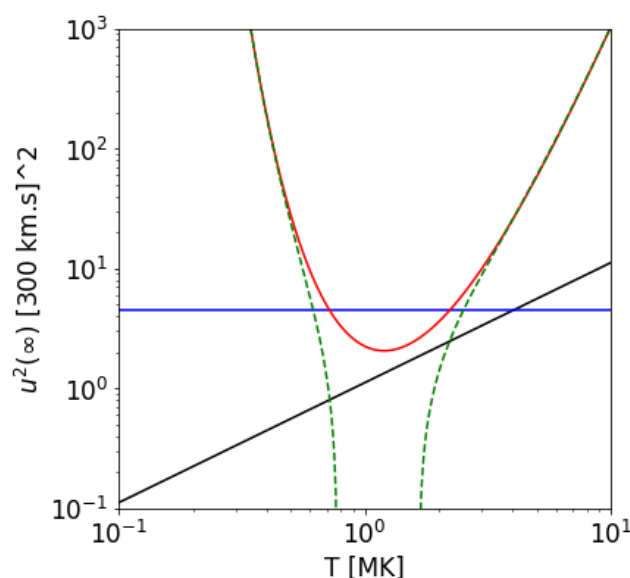


FIGURE 8 – Les différents termes de l'équation (54). Bleu : potentiel gravitationnel. Rouge : Flux de chaleur. Noir : Enthalpie. Pointillés : Somme.

La figure 8 illustre ces différents termes. On voit que dans la zone de fonctionnement observée, autour de 1MK le bilan est négatif : il manque de l'énergie. Un terme d'injection d'énergie  $Q$  est donc certainement nécessaire à l'existence d'un vent. C'est particulièrement critique pour le vent rapide - des hypothèses sont que celui-ci est accéléré par des ondes d'Alfvén et un possible chauffage cyclotronique des protons.

Il ne faut pas oublier non-plus que ces estimations sont faites avec des hypothèses (conductivité SB, négligence du champ magnétique, températures électroniques et ioniques équivalentes, etc.) sur lesquelles on peut jouer. Mais enfin le consensus est qu'il manque un peu d'énergie pour accélérer le vent.

Notons enfin, même si ça dépasse le cadre de ce cours, qu'un modèle de vent solaire peut-être construit à partir des équations fluides incluant l'équation d'énergie, avec une fermeture sur la densité de courant de chaleur  $\mathbf{j}_{th}$ . Ce travail a été fait dès 1960 par Chamberlain en prenant pour  $\mathbf{j}_{th}$  l'expression SB - cependant il utilisait l'hypothèse de  $u \rightarrow 0$  loin du soleil (il croyait alors que la solution réalisée était de type sub-sonique). Aujourd'hui la plupart des modèles sont numériques et utilisent pour  $\mathbf{j}_{th}$  des relations plus ou moins artisanales, mélangeant effets de transports et effets balistiques en fonction de la densité, de la température et du champ magnétique local (grand absent de cette partie).

### 3.6 Le rôle du champ électrique

On a noté dans les sections sur l'expansion polytrophe et sur le bilan d'énergie que les termes d'enthalpie faisaient intervenir la somme des pressions électroniques et ioniques. Une conséquence de cela étant qu'un vent pouvait exister alors qu'une des populations ne remplissait pas les conditions d'existence, si l'autre compensait. Les deux populations ne se comportent donc pas indépendamment, alors qu'aucun terme explicite de couplage (par exemple collisionnel) entre les populations n'a été introduit.

Le modèle utilisé ne fait pas intervenir explicitement le champ électrique. Mais celui-ci joue évidemment un rôle en ce qu'il garantit l'électro-neutralité.. Pour comprendre intuitivement le rôle de "courroie de transmission" entre ions et électrons joué par le champ électrique entre les dynamiques des électrons et des ions, étudions le modèle simplifié suivant.

Tout d'abord nous négligeons la masse des électrons :  $m_e \rightarrow 0$ . D'après (31), les électrons sont donc dans un état d'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dp_e}{dr} = -en_e E \quad (56)$$

Supposons maintenant que la température des protons est négligeable :  $T_p \rightarrow 0$ . Sous cette hypothèse, des protons "seuls" (ou un gaz neutre) seraient évidemment confinés par l'atmosphère solaire. L'équation d'évolution de la vitesse des protons s'écrit comme

$$n_p m_p u_p \frac{d}{dr} u_p = en_p E - n_p m_p \frac{GM}{r^2} = -\frac{dp_e}{dr} - n_p m_p \frac{GM}{r^2}. \quad (57)$$

Dont la résolution a été faite précédemment - et ne dépendra, dans ce cas, évidemment que de la relation de fermeture des électrons. Qu'on peut interpréter ainsi : les électrons (chauds), entraînent les protons (froids) contre l'effet de la force de gravité en produisant un champ électrique  $E$ , dont l'action contraint électrons et protons à se mouvoir ensemble. L'équation précédente nous permet d'exprimer ce champ électrique comme

$$E = \frac{-1}{en_e} \frac{dp_e}{dr} = \frac{m_p}{e} \left( \frac{GM}{r^2} + u_p \frac{du_p}{dr} \right) \quad (58)$$

Le premier terme est présent même dans une atmosphère statique. Il s'agit du champ dit de "Panekoeck-Rossland", qui joue un rôle important dans les atmosphères statiques ionisées (nous le verrons dans le cours sur l'ionosphère terrestre). Le second terme dépend du profil de vitesse des protons, lui même déterminé par la forme du terme de pression électronique  $p_e$ , et donc par la forme de l'équation de fermeture des électrons. Ce modèle simple laisse entrevoir la manière dont champ électrique interplanétaire et équation de fermeture des électrons sont intimement liés.

### 3.7 Bibliographie

- Interplanetary Dynamical Processes, Eugene Newman Parker, Interscience Publishers, New York, 1963
- Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields, Eugene N. Parker, Astrophysical Journal, vol. 128, p.664, 1958
- Stellar Winds Mechanisms and Instabilities, S. Owocki, Evolution of Massive Stars, Mass Loss and Winds, EAS Publication Series, 13, 2004

## 4 Le champ magnétique interplanétaire

Nous savons que le soleil est magnétisé. A l'ordre le plus bas son champ est dipolaire, mais proche de sa surface il est bien plus structuré et complexe. Cette structuration a évidemment des effets sur la structure du vent solaire lui-même et sur son accélération. Le modèle développé dans la partie précédente, en symétrie sphérique, n'est pas modifié par la présence d'un champ radial, aussi on peut supposer (et c'est la raison pour laquelle il fournit des résultats dans l'ensemble satisfaisant) qu'il est s'applique, sinon à l'ensemble du soleil, au moins au zones de champ ouvert sur le milieu interplanétaire.

### 4.1 Théorème du gel

Nous démontrons dans cette partie le théorème d'Alfvén "du gel", qui décrit la conservation des connexions magnétiques dans un fluide de conductivité électrique infinie. Celui-ci découle de l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (59)$$

à laquelle on adjoint l'hypothèse d'une conductivité infinie du milieu, et donc d'une loi d'Ohm de la forme  $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , pour obtenir

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (60)$$

Le théorème du gel d'Alfvén découle directement de cette dernière équation, dont il est une reformulation géométrique.

On considère un petit élément  $\delta \ell(t)$  advecté par le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  du plasma. Regardons comment le produit vectoriel  $\delta \ell \times \mathbf{B}$  évolue dans le temps :

$$\frac{d}{dt}(\delta \ell \times \mathbf{B}) = \frac{d\delta \ell}{dt} \times \mathbf{B} + \delta \ell \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (61)$$

L'évolution de l'élément  $\delta \ell$  est donnée, si on suppose  $\delta \ell$  suffisamment petit pour pouvoir



développer au premier ordre  $\mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\boldsymbol{\ell}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\delta\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ , par<sup>1</sup> :

$$\frac{d\delta\boldsymbol{\ell}}{dt} = (\delta\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (62)$$

tandis que celle du champ magnétique vaut, d'après l'eq.(60)

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (63)$$

qu'on peut reformuler, en utilisant l'expression du rotationnel d'un produit vectoriel, comme

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (64)$$

où on a utilisé l'équation de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . On peut à l'aide de ces expressions réécrire l'eq.(61) sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \times (\delta\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u})\delta\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} + \delta\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u}. \quad (65)$$

Or, si  $\mathbf{B}$  et  $\delta\boldsymbol{\ell}$  sont colinéaires, on a évidemment

$$\mathbf{B} \times (\delta\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \delta\boldsymbol{\ell} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad \text{et} \quad \delta\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = 0. \quad (66)$$

L'eq.(65) montre donc que si  $\mathbf{B}$  et  $\delta\boldsymbol{\ell}$  sont colinéaires à un instant donné, ils le restent à tous instants ultérieurs (et l'étaient à tous instants antérieurs...). Autrement dit, qu'un élément  $\delta\boldsymbol{\ell}$  décrivant une ligne de champ magnétique décrira encore après advection par le champ de vitesse du plasma cette même ligne de champ magnétique.

Ce résultat, qui énonce la conservation des connexions magnétiques (c'est-à-dire le fait que deux points connectés par une ligne de champ magnétique à un instant le resteront à tous instants ultérieurs), constitue une contrainte très forte, qui est levée par la prise en compte d'une résistivité non-nulle dans la loi d'Ohm (eq.60). Les lignes de champs "immuable" de la MHD idéale peuvent alors se "reconnecter". C'est un sujet que nous n'aborderons pas ici.

## 4.2 La spirale de Parker

Nous nous intéressons ici à la manière dont la conservation des connexions magnétiques, dont on vient de voir l'origine, implique une structure particulière spirale pour le champ magnétique interplanétaire.

Le soleil tourne sur lui-même en environ 25 jours au niveau de son équateur (la période de rotation est plus grande, presque 40 jours, aux pôles), soit une fréquence angulaire

---

1. car par définition de  $\delta\boldsymbol{\ell}$  en tant qu'élément advecté par le champ de vitesse, on a  $d\delta\boldsymbol{\ell}/dt = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\boldsymbol{\ell}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})$  – faites un schéma au besoin.

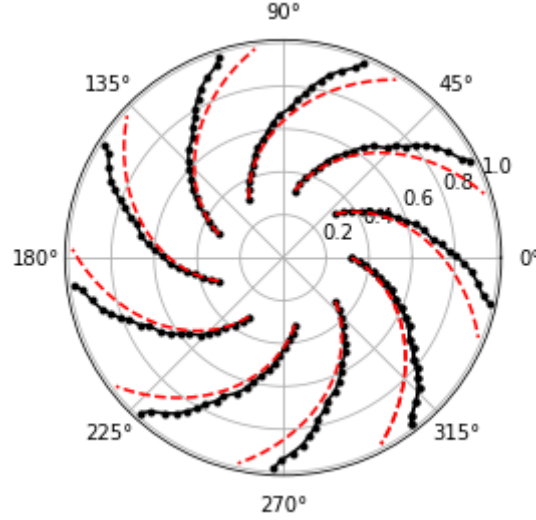


FIGURE 9 – Evolution de la direction du champ magnétique interplanétaire mesuré par le magnétomètre embarqué sur la sonde Helios, pour des vitesses de vent comprises entre 250 et 300 km.s<sup>-1</sup>.

$\omega \simeq 2,9 \times 10^{-6}$  rad.s<sup>-1</sup>. Si nous considérons le champ magnétique à la surface du soleil comme fixé, ces conditions aux limites sont donc, dans un référentiel inertiel, variables dans le temps (avec la rotation solaire). Il est plus pratique de traiter le problème sans dépendance explicite en  $t$ , nous nous plaçons donc dans un référentiel tournant avec le soleil.

De manière à simplifier les calculs, nous supposons que nous pouvons négliger l'accélération du vent solaire au delà d'un certaine distance  $a \gg r_c$  :  $u(r > a) = u_0$ .

Dans le référentiel tournant avec le soleil, les lignes de vitesse du vent solaire sont courbées : le champ de vitesse a une composante azimuthale

$$u_\phi = -\omega(r - a) \sin \theta \quad (67)$$

$\theta$  étant la co-latitude du point considéré, où nous avons considéré que la composante  $u_\phi$  du champ de vitesse était nulle jusqu'au rayon  $a$ , i.e. que le vent solaire était en co-rotation avec le soleil jusqu'à ce point.

Les coordonnées d'un petit élément  $d\ell = (dr, 0, r \sin \theta d\phi)$  le long d'une ligne de champ de vitesse sont reliées par

$$u_0 r d\phi = -\omega(r - a) dr \quad (68)$$

et une ligne de vitesse de condition initiale  $(a, \phi_0)$  a donc pour équation, en coordonnées sphériques,

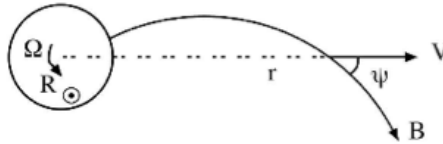
$$r(\phi) - a \ln(r(\phi)/a) = a - \frac{u_0}{\omega} (\phi - \phi_0) \quad (69)$$

ce qui, suffisamment loin du soleil ( $r \gg a$ ) est l'équation d'une spirale d'Archimède, puisqu'on peut alors négliger le terme en log.

Dans le référentiel considéré, où le système ne dépend pas du temps, la conservation des connexions magnétiques impose aux lignes de champ magnétiques de coïncider avec les lignes de champ de vitesse. Le champ magnétique interplanétaire a donc une forme spirale, qu'on nomme spirale de Parker (cf. fig.9).

Nous pouvons tirer les conséquences de cette structure du champ magnétique sur l'évolution radiale des composantes de  $\mathbf{B}$ . L'angle entre une ligne de champ (petit élément  $d\ell$ ) et la direction radiale vaut

$$\tan \psi = \frac{B_\phi}{B_r} = \frac{r \sin \theta d\phi}{dr} = -\frac{\omega}{u_0}(r-a) \sin \theta \quad (70)$$



Nous savons que la divergence du champ magnétique est nulle, ce qui en symétrie sphérique s'écrit, pour la composante radiale,  $\partial_r(r^2 B_r) = 0$ . Nous avons donc

$$B_r(r, \theta, \phi) = B(a, \theta, \phi_0) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \quad (71)$$

d'où on peut déduire la composante azimuthale, en utilisant (70) :

$$B_\phi(r, \theta, \phi) = -B(a, \theta, \phi_0) \frac{\omega}{u_0}(r-a) \sin \theta \left(\frac{a}{r}\right)^2 \quad (72)$$

Une conséquence de la structure spirale est donc que la composante radiale du champ décroît en  $r^{-2}$  tandis que (pour  $r \gg a$ ), sa composante azimuthale décroît en  $r^{-1}$ . L'amplitude du champ magnétique suit donc une loi de la forme :

$$|B(r, \theta, \phi)| \simeq B(a, \theta, \phi_0) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1 + \frac{\omega^2 \sin^2 \theta}{u_0^2}(r-a)^2} \quad (73)$$

Une longueur caractéristique de ce système est donc la distance à laquelle les deux composantes sont égales (où l'angle  $\psi$  est égal à  $-\pi/4$ ). Cette distance vaut  $r_* = u_0/\omega \sin \theta$ . Proche du soleil (pour  $r-a \ll r_*$ ), le champ est essentiellement radial et son amplitude décroît en  $r^{-2}$ . Loin du soleil (pour  $r-a \gg r_*$ ), le champ est principalement azimuthal et son amplitude décroît en  $r^{-1}$ . La valeur typique de  $r_*$  dans le plan de l'écliptique est de 1 UA.

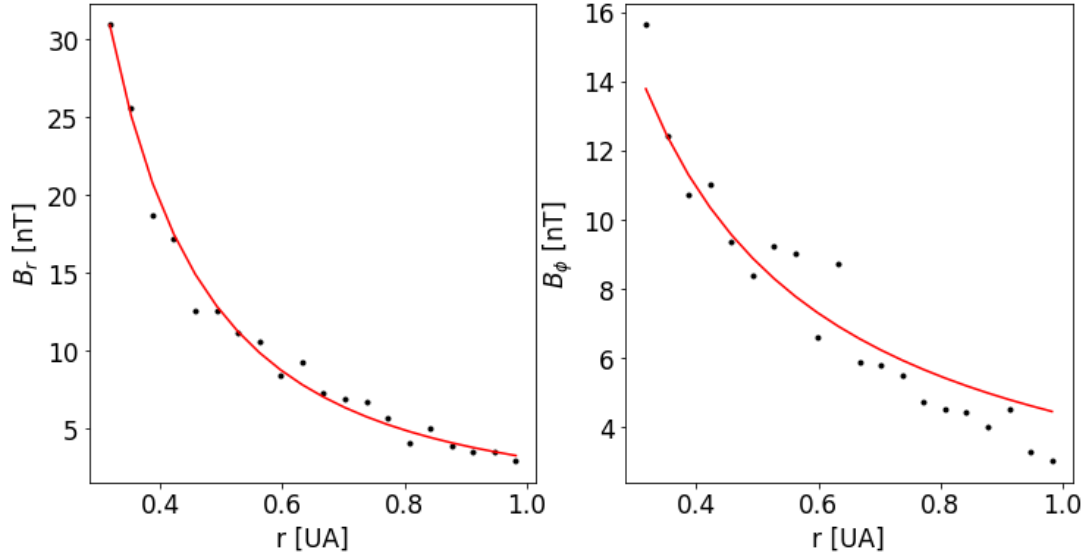


FIGURE 10 – Evolution radiale des composantes  $B_r$  et  $B_\phi$  mesurées par le magnétomètre embarqué sur la sonde Helios, pour des vitesses du vent comprises entre 350 et 400 km.s<sup>-1</sup>. Comparaison avec des lois en  $r^{-2}$  et  $r^{-1}$ .

### 4.3 Conditions aux limites, couche neutre.

$B(a, \theta, \phi)$ , qui apparait dans les équations précédentes, est la condition à la limite imposée par le champ solaire, en  $r = a$ . Les lignes de champ assez loin du soleil (on a pris  $a \gg R_s$ ) étant étirées radialement par le vent solaire, on peut avec une bonne approximation considérer que le vecteur  $B$  en  $r = a$  est à peu près radial. B devant être de divergence nulle, il faut que le flux positif à travers la sphère de surface  $a$  soit égal à celui de flux négatif (en d'autres termes, qu'il y ait autant de lignes de champ qui entrent dans le soleil que de lignes qui sortent).

Il est naturel, en première approximation, de considérer ce champ à la limite comme celui d'un dipôle de moment magnétique  $m$ ,

$$B_r(a, \theta, \phi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{a^3}. \quad (74)$$

La valeur de  $B$  pour  $a = 10R_s$  est d'environ 1300 nT, soit 0.013 G, le gauss (1G = 10<sup>-4</sup> T étant souvent utilisé en physique solaire, comme les ergs et les unités cgs en général). Il faut garder à l'esprit qu'il s'agit vraiment d'un ordre de grandeur, qui est de plus variable, car dépendant fortement du cycle solaire (cf. plus bas).

On voit d'après eq.(74) que les lignes de champ interplanétaire entrent dans le soleil pour  $0 < \theta < \pi/2$  (hémisphère Nord) et en sortent pour  $\pi/2 < \theta < \pi$  (hémisphère Sud). Le champ magnétique change donc de signe autour de  $\theta = \pi/2$  (équateur magnétique

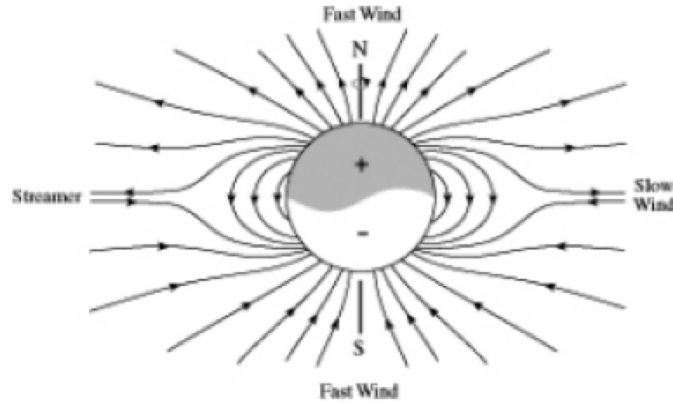


FIGURE 11 – Représentation des lignes de champ dans la plan équatorial solaire.

solaire) : c'est ce qu'on appelle la couche neutre. Celle-ci étant étant inclinée par rapport au plan de l'écliptique, un observateur sur Terre verra la moitié du temps (la moitié d'une période de rotation solaire) un champ pointant vers le soleil, et l'autre moitié un champ pointant vers l'extérieur. (cf. fig.12)

L'existence de cette couche neutre implique l'existence d'une couche de courant dans le plasma. En effet d'après l'équation de Maxwell-Ampère, un courant azimuthal

$$j_\phi(r) \simeq \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial B_r(r)}{\partial \theta} = -\frac{m}{2\pi a} \frac{\sin \theta}{r^3}. \quad (75)$$

On a utilisé l'expression pour  $B_r$  et négligé la composante  $\phi$  du champ magnétique. Dans les faits ce courant est plus localisé dans une couche assez fine en épaisseur, et modélisée par un courant  $j_\phi$  non-nul sur une épaisseur finie en géométrie cylindrique. Dans un modèle simple, on peut obtenir le champ interplanétaire en ajoutant le champ dipolaire à celui crée par la couche neutre.

#### 4.4 Cycle solaire, vent lent et vent rapide.

Le champ magnétique solaire tire principalement son origine de l'effet dynamo dans la zone de convection, sous la photosphère. Pour des raisons liées à la dynamique de cette instabilité, la structure du champ varie périodiquement dans le temps, avec un cycle complet en environ 22 ans. Dans les périodes de *minimum d'activité solaire*, environ tous les 11 ans, le champ magnétique solaire est, avec une bonne approximation, dipolaire, avec un moment magnétique pointant vers le nord ou le sud (il faut donc 22 ans pour que le champ retrouve sa configuration initiale). Durant ces périodes de minimum, le nombre de taches solaires est faible

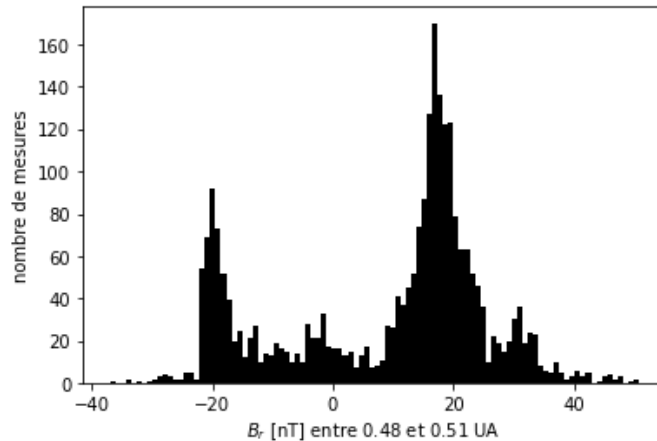


FIGURE 12 – Histogramme des valeurs de champ magnétique à 0.5 UA mesurées par le magnétomètre sur la sonde Helios. On voit bien deux pics pour  $B_r$ , de polarité opposées. En l'occurrence la sonde a passé, sur cette série de mesures, plus de temps au dessus (polarité positive) de la couche neutre qu'au dessous.

Dans les périodes dites de *minimum d'activité solaire*, six ans environ après les minimum, le champ magnétique est fortement multipolaire. Le nombre de tâches solaires est grand (les tâches solaires sont des régions caractérisées par un champ magnétique local fortement perturbé et de forte amplitude - on comprend donc le lien avec la multipolarité du champ à l'échelle globale).

La structure du champ magnétique à la surface du Soleil détermine les conditions aux limites pour l'émission du vent solaire (effets complexes à modéliser que nous n'avons pas pris en compte dans le modèle décrit dans la section précédente). On peut comprendre intuitivement que l'effet du champ magnétique sur le plasma sera de limiter sa mobilité dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ.

Le vent sera donc facilement accéléré dans les régions où le champ  $B$  solaire est topologiquement ouvert sur le milieu interplanétaire, et moins facilement accéléré (voire pas accéléré du tout) dans les régions où  $B$  n'est pas ouvert (lignes de champ  $B$  reliant un point de la surface solaire à un autre).

Des régions ouvertes, émanent un vent dit "rapide" ( $> 700 \text{ km.s}^{-1}$ ). Ces régions topologiquement ouvertes se trouvent essentiellement aux niveaux des pôles du soleil, mais aussi dans les régions actives (tâches solaires).

Dans les régions où le flux magnétique ouvert est plus faible, l'accélération doit suivre des chemins plus complexes, probablement via des phénomènes de reconnexion, et le vent

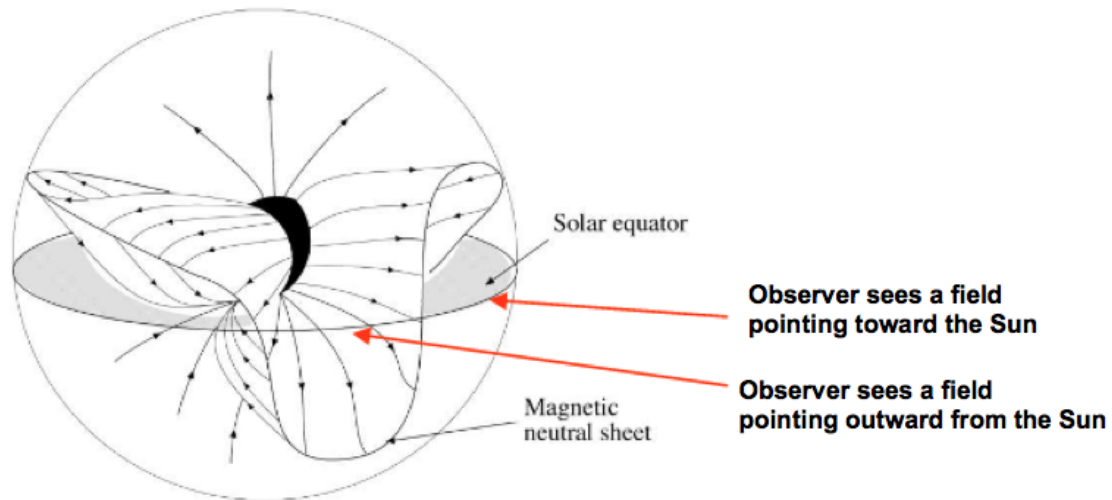


FIGURE 13 – En réalité la couche neutre n'est pas droite mais décrit une courbe (au premier ordre un sinus) sur la surface solaire. On appelle parfois cela l'effet "robe de ballerine". L'effet est très exagéré sur la figure.

est accéléré jusqu'à des vitesses moindres  $\sim 300 \text{ km.s}^{-1}$ . On parle de vent lent. Ces régions d'où émanent le vent lent sont essentiellement au niveau de l'équateur solaire (et donc de la couche neutre, et du plan de l'écliptique).

Il est intéressant de noter que vent lent et rapide sont caractérisés par des paramètres physiques assez différents (la température du vent rapide est plus élevée, mais sa densité plus faible, la présence d'ondes d'Alfvén de grande amplitude est aussi fréquente dans le vent rapide et moins dans le lent. La composition en espèces mineurs (particules  $\alpha$  en particulier) est aussi différentes dans ces deux types de vent. Bref il s'agit sous de nombreux aspects de deux types de milieu assez différents. Cependant on peut retrouver un certain nombre d'invariants, le flux d'énergie qu'on a étudié dans la section précédente en est un : il dépend peu de la vitesse du vent.

La structure du vent solaire à grande échelle est donc fortement dépendant du cycle solaire via l'action du champ B solaire comme condition aux limites. En période de maximum d'activité cette structure sera plus complexe qu'en période de minimum. Elle pourra en particulier présenter de nombreuses zones d'interaction entre vent solaire et vent rapide, dites "régions d'interaction en co-rotation" (CIR en anglais). Ces zones présentent des discontinuités de paramètres physique (chocs), puisque les configurations magnétiques différentes des tubes de flux rapides et lent les empêchent de se mélanger.

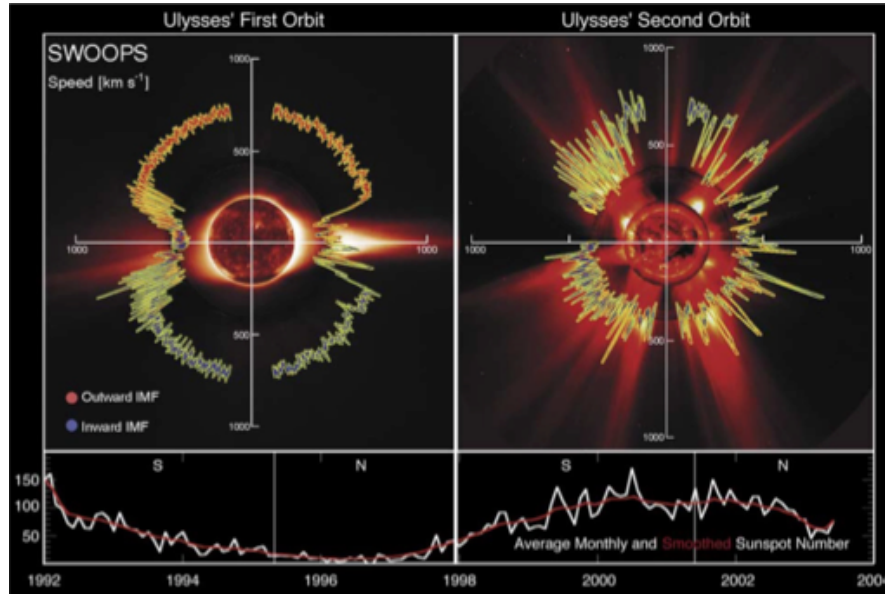


FIGURE 14 – Illustration du cycle solaire, au cours de la mission Ulysses, montrant la structure en latitude de la vitesse du vent solaire et du champ magnétique, en période de minimum d'activité (gauche) et de maximum (droite).

#### 4.5 Mouvement des particules chargées dans la spirale de Parker

La structure en spirale du champ magnétique interplanétaire est une conséquence directe du mouvement radial du vent solaire, dans lequel est gelé le champ magnétique. La trajectoire des particules chargées suivant à peu près les lignes de champ, on pourrait en déduire que celles-ci ont un mouvement lui même spiral, et y voir là une contradiction. Cette contradiction apparente est résolue en prenant en compte le mouvement de dérive en champ croisé des particules dans le champ électromagnétique interplanétaire. La contribution de celui-ci sera plus ou moins importante selon la vitesse de la particule considérée, et on va voir que si le mouvement des particules thermiques est effectivement radial (à très peu de chose près), celui des particules très énergétiques suit au contraire la spirale de Parker (à peu de chose près là aussi).

On se place dans un référentiel héliocentrique, dans lequel le centre du Soleil est au repos, et est animé d'un mouvement de rotation sur lui-même. Il existe dans ce référentiel, en raison de l'advection des lignes de champ magnétique par le vent solaire, un champ électrique  $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ , où  $\mathbf{V}$  est la vitesse du vent solaire. En négligeant tout autre mouvement de dérive perpendiculairement à la ligne de champ, le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  d'une particule chargée peut être écrit comme la somme d'une composante alignée à la ligne de champ et de cette vitesse de dérive :  $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\times}$ , où  $\mathbf{b} = \cos \psi \mathbf{u}_r + \sin \psi \mathbf{u}_{\phi}$  est le vecteur unitaire localement aligné avec la ligne de champ ( $\psi$  étant l'angle entre la ligne de champ et la radiale définie dans la section 4.2. La vitesse de dérive en champ croisé



est

$$\mathbf{v}_\times = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{(-\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{B^2} = \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b} \quad (76)$$

Et donc le vecteur vitesse de la particule vaut

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + (v_\parallel - V_\parallel) \mathbf{b} \quad (77)$$

$$v_r = V + v_\parallel \cos \psi, \quad v_\phi = v_\parallel \sin \psi \quad (78)$$

#### 4.6 Moment angulaire du vent solaire, point d'Alfvén

Nous avons jusqu'à présent considéré que le champ de vitesse du vent solaire était radial. On s'intéresse ici à sa composante azimuthale  $u_\phi$ . Nous allons voir comment elle est influencée par l'existence du champ magnétique et de sa structure en spirale.

La composante azimuthale, en coordonnées sphériques, de l'équation de conservation de l'impulsion (2), donne

$$nm_p \frac{u_r}{r} \frac{d}{dr}(ru_\phi) = (j \times B)_\phi \quad (79)$$

où la seule force non-radiale est la force de Laplace. On peut évaluer celle-ci à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère (le courant de déplacement est négligé)

$$(j \times B)_\phi = \left( \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times B) \times B \right)_\phi = \frac{B_r}{\mu_0 r} \frac{d}{dr}(rB_\phi) \quad (80)$$

On peut intégrer facilement l'équation (79) en multipliant à gauche et à droite par  $r^3$  et en notant que  $r^2 B_r = \text{cste}$  ( $B$  est de divergence nulle) et que  $r^2 n u_r = \text{cste}$  (par conservation du nombre de particule, ou de la masse, cf. section sur le vent solaire). On obtient

$$ru_\phi - \frac{rB_r B_\phi}{\mu_0 n m_p u_r} = \mathcal{L} \quad (81)$$

où  $\mathcal{L}$  est la constante d'intégration, qui est ici le moment angulaire (par unité de masse) du vent solaire.

En présence de cette composante azimuthale de vitesse, la forme de la spirale de Parker est un peu modifiée. En effet le champ de vitesse dans le référentiel en rotation avec le soleil vaut maintenant  $u'_\phi = u_\phi - \omega(r - a) \sin \theta$ . L'équation (70) du rapport entre  $B_\phi$  et  $B_r$  est donc modifiée,

$$\tan \psi = \frac{B_\phi}{B_r} = \frac{u_\phi - \omega(r - a) \sin \theta}{u_r} \quad (82)$$

Cette relation nous permet d'éliminer  $B_\phi$  de l'éq.(81), et d'obtenir

$$u_\phi = \omega r \frac{M_A^2 \mathcal{L} r^{-2} \omega^{-1} - 1}{M_A^2 - 1} \quad (83)$$

où

$$M_A^2 = \left( \frac{u_r}{v_A} \right)^2 = \frac{\mu_0 n m_p u_r^2}{B_r^2} \quad (84)$$

est le nombre de Mach Alfvénique "radial" (ici au carré), c'est-à-dire le rapport entre la vitesse radiale du vent et la vitesse d'Alfvén  $v_A$  calculée en ne tenant compte que du champ radial.  $M_A$  est très petit proche du Soleil (fort champ magnétique et vitesse faible pour le vent) mais vaut environ  $M_A \sim 10$  à 1 UA. Le vent solaire, en plus du point transsonique  $r_c$ , passe par un second point critique : le point Alfvénique, où il passe d'une vitesse sub-Alfvénique à une vitesse super-Alfvénique.

Lors du passage au point d'Alfvén le dénominateur de (83) s'annule. La vitesse azimuthale devant tout de même être définie en ce point, cela implique que le numérateur s'annule aussi (tout comme on avait une forme indéterminée au passage du point transsonique dans le modèle de Parker). Cette condition détermine la valeur du moment angulaire massique,

$$\mathcal{L} = \omega r_A^2 \quad (85)$$

qui est un résultat intéressant : s'il n'y avait pas de champ magnétique, la perte serait égale à  $\omega R_s^2$ . On voit que l'effet des contraintes magnétiques revient à rigidifier le mouvement du plasma autour du soleil, et du point de vue du transport de moment angulaire, à ce que tout se passe comme si le vent solaire était entièrement en co-rotation avec le soleil jusqu'au rayon d'Alfvén  $r_A$ .

La quantité  $\dot{L}$  de moment angulaire perdue par unité de temps par le soleil vaut donc  $\dot{L} = \dot{M} \mathcal{L}$ . Pour des paramètres typiques du vent solaire, la vitesse d'Alfvén radiale varie avec  $r$  comme  $v_A(r) = \frac{6000 R_s}{r}$  km.s<sup>-1</sup>. On obtient donc pour des valeurs typiques de la vitesse du vent un point d'Alfvén à  $r_A \simeq 10 - 20 R_s$  (cf. fig.15). La quantité de moment angulaire perdue par unité de temps vaut donc  $\dot{L} \sim 3.10^{22}$  (J.s).s<sup>-1</sup>. Le moment angulaire total du soleil est de l'ordre de  $L \sim 2.10^{41}$  J.s. L'échelle de temps sur laquelle le moment angulaire change significativement est donc  $\tau_L = L/\dot{L} \sim 200$  milliards d'années. Contrairement à la perte de masse, dont on a vu qu'elle n'était pas significative sur la durée de vie du soleil, la variation de moment angulaire par émission de vent solaire représente sur toute sa durée de vie 5 – 10% du moment initial. Les étoiles magnétisées, de manière générale, représentent un canal efficace de dissipation du moment angulaire dans l'univers.

Les mesures montrent de plus que la composante tangentielle  $u_\phi$  de la vitesse est bien supérieure à l'estimation (83). On observe des vitesses tangentielles de plusieurs dizaines de km.s<sup>-1</sup> soit quasiment un ordre de grandeur au dessus de la prédiction théorique. C'est un sujet de recherche actif.

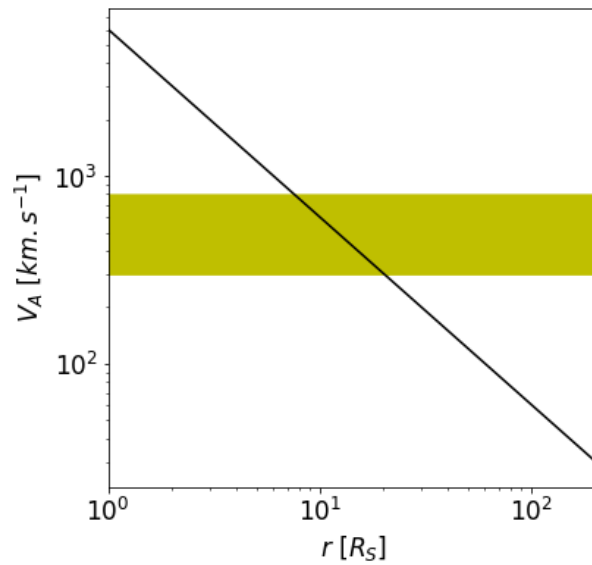


FIGURE 15 – Vitesse d’Alfvén pour un modèle de champ magnétique radial et de densité. La zone de vitesses occupées par le vent solaire est montré en jaune. On voit que le point Alfvénique se situe grossièrement entre 10 et 20 rayons solaires.

#### 4.7 Petites échelles : Ondes et turbulence

A faire.

#### 4.8 Bibliographie

- Interplanetary Dynamical Processes, Eugene Newman Parker, Interscience Publishers, New York, 1963
- The Angular Momentum of the Solar Wind, Weber, Edmund J. and Davis, Levere, Jr., Astrophysical Journal, vol. 148, p.217-227, 1967

## A Appendice : Equations fluides

On s'intéresse ici à la dérivation des équations d'évolutions des trois premiers moments centrés de la distribution des vitesses  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  d'une population de particules. Ces moments centrés définissent les grandeurs macroscopiques "fluides",  $n(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  et  $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ , soient la densité, la vitesse moyenne et le tenseur des contraintes (ou tenseur de pression).

La distribution des vitesses  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  est définie de telle sorte que le nombre de particules dans le volume de l'espace des phases  $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$  au temps  $t$  est  $dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$ . Son évolution est donnée par une équation du type

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \mathcal{C}(f) \quad (86)$$

où le membre de gauche peut s'écrire  $df/dt$  décrit l'évolution de la fonction de distribution le long de la trajectoire déterministe d'une particule dans le champ de force  $\mathbf{F}$ , et le membre de gauche est un opérateur de collision, décrivant l'effet de processus aléatoires sur la fonction de distribution.

On définit la moyenne de  $\psi$  sur la fonction de distribution  $f$  comme

$$\langle \psi \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int d^3\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (87)$$

où le facteur de normalisation est la densité particulaire

$$n(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (88)$$

### A.1 Densité

L'évolution de la densité particulaire définie ci-dessus (eq.88) est obtenue en intégrant l'équation cinétique (86) sur l'espace des vitesses. On obtient

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{u} = 0 \quad (89)$$

où on a utilisé le fait que  $f(v \rightarrow \pm\infty) = 0$ , et où l'opérateur de collision est supposé vérifier la propriété  $\int d^3\mathbf{v} \mathcal{C}(f) = 0$  (qui traduit le fait qu'aucune particule n'est créée ou détruite au cours d'une collision – l'opérateur en question ne décrit donc pas de réaction chimiques, par exemple).

### A.2 Vitesse

On définit la vitesse moyenne comme  $\mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle$ . Son évolution est obtenue en multipliant l'équation cinétique (86) par  $\mathbf{v}$  et en intégrant sur la vitesse. On obtient

$$\frac{\partial mn\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{\Pi}} = n\mathbf{F} + n\mathbf{R} \quad (90)$$

où l'on a introduit un tenseur de contraintes  $\bar{\Pi} = mn \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle$  et la force de friction  $\mathbf{R}$  par

$$n\mathbf{R} = \int d^3\mathbf{v} m\mathbf{v}\mathcal{C}(f). \quad (91)$$

Ce dernier terme décrit l'échange d'impulsion entre une population de particules décrite par la distribution  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , et des systèmes extérieurs. Cet échange est décrit au niveau macroscopique par l'opérateur  $\mathcal{C}(f)$ . Les systèmes extérieurs peuvent être d'autres populations de particules, ou des champs, décrits de manière statistiques.

Le tenseur  $\bar{\Pi}$  peut-être séparé en un tenseur de contraintes internes et des contraintes moyennes, en introduisant la composante aléatoire des vitesses  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ . On a alors

$$\bar{\Pi} = mn\mathbf{u}\mathbf{u} + mn \langle \mathbf{w}\mathbf{w} \rangle = mn\mathbf{u}\mathbf{u} + p\bar{\mathbf{I}} + \bar{\pi} \quad (92)$$

où les contraintes internes  $mn \langle \mathbf{w}\mathbf{w} \rangle$  ont été séparées en une composante isotrope (le tenseur de pression  $p\bar{\mathbf{I}}$ ) et les contraintes proprement dites  $\bar{\pi}$ , qui décrivent tous les écarts à l'isotropie de la fonction de distribution (et sont ainsi reliées à la viscosité du fluide).

En utilisant l'identité  $\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ , ainsi que l'équation de continuité (89), on peut ré-écrire l'équation (90) sous la forme plus habituelle

$$nm \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p - \nabla \cdot \bar{\pi} + n\mathbf{F} + n\mathbf{R} \quad (93)$$

Dans l'essentiel du corps de ce cours, on considèrera des tenseurs isotropes, donc  $\bar{\pi} = 0$  et on négligera les effets collisionels, avec  $\mathbf{R} = 0$ .

### A.3 Energie

On obtient l'équation décrivant la conservation de l'énergie en multipliant l'équation cinétique par  $\frac{1}{2}mv^2$  et en intégrant sur l'espace des vitesses. On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}nm\mathbf{u}^2 + \frac{3}{2}nkT \right) + \nabla \cdot \mathbf{j}_E = n\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + n\mathbf{u} \cdot \mathbf{R} + nQ \quad (94)$$

où la température *cinétique* est définie par  $m\mathbf{w}^2 = 3kT$ . La densité de flux d'énergie cinétique des particules  $\mathbf{j}_E$  est définie par  $\mathbf{j}_E = n \langle \frac{1}{2}mv^2\mathbf{v} \rangle$ .  $Q$  est la chaleur échangée par particule et par unité de temps entre le système de particules et des systèmes extérieurs macroscopiques. Ce terme est donné par

$$nQ = \int d^3\mathbf{v} \frac{1}{2}mw^2\mathcal{C}(f), \quad (95)$$

et bien sûr d'après les définitions précédentes,

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{1}{2}mv^2\mathcal{C}(f) = nQ + n\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}. \quad (96)$$

La densité de flux d'énergie peut être séparée entre ses parties internes et convectives,

$$\mathbf{j}_E = n \left\langle \frac{1}{2} m w^2 \mathbf{v} \right\rangle + n \left\langle \frac{1}{2} m u^2 \mathbf{v} \right\rangle + n \langle m(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} \rangle + n \langle m(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{w} \rangle, \quad (97)$$

et donc

$$\mathbf{j}_E = \left( \frac{1}{2} m u^2 + \frac{3}{2} k T \right) n \mathbf{u} + (\bar{\mathbf{p}} + \bar{\boldsymbol{\pi}}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{j}_{th} \quad (98)$$

où la densité de flux de chaleur est définie par  $\mathbf{j}_{th} = n \langle \frac{1}{2} m w^2 \mathbf{w} \rangle$ .

## A.4 Entropie

On peut obtenir une équation décrivant l'évolution de l'énergie interne du gaz de particules en soustrayant le travail des forces (par unité de temps et de volume) de l'équation (94). Ce terme de travail est obtenu en prenant le produit scalaire de l'équation de conservation de l'impulsion (90) par  $\mathbf{u}$ . On commence par remarquer que pour toute quantité scalaire  $\psi$ , l'identité suivante est valable<sup>2</sup> :

$$n \frac{d\psi}{dt} \equiv n \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \right) = \frac{\partial}{\partial t} n \psi + \nabla \cdot \psi n \mathbf{u}. \quad (99)$$

On calcule le produit scalaire de l'équation (90) par  $\mathbf{u}$ . On a pour le membre de droite, en utilisant l'identité précédente

$$n m \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{n m u^2}{2} + \nabla \cdot \frac{n m u^2}{2} \mathbf{u} \quad (100)$$

à partir de quoi on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{n m u^2}{2} + \nabla \cdot \frac{n m u^2}{2} \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (-\nabla p - \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\pi}} + n \mathbf{F} + n \mathbf{R}) \quad (101)$$

qui exprime la conservation de l'énergie cinétique macroscopique. En soustrayant cette expression de l'équation de conservation générale de l'énergie (94), il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{3 n k T}{2} - \nabla \cdot \frac{n m u^2}{2} \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{j}_E = \mathbf{u} \cdot (\nabla p + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\pi}}) + n Q. \quad (102)$$

En utilisant finalement l'équation (98) détaillant la densité de flux d'énergie, et en simplifiant cette équation en utilisant encore l'identité (99), on obtient enfin<sup>3</sup>

$$n \frac{d}{dt} \frac{3 k T}{2} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{th} - (\bar{\mathbf{p}} + \bar{\boldsymbol{\pi}}) : \nabla \mathbf{u} + n Q, \quad (103)$$

2. il faut utiliser l'équation de continuité  $dn/dt = -n \nabla \cdot \mathbf{u}$  pour le démontrer.

3. où le double produit scalaire est défini par  $\mathbf{a} : \nabla \mathbf{b} = a_{ij} \partial_{x_j} b_i$  (avec sommation sur les indices). Pour un tenseur isotrope  $\bar{\mathbf{p}} = p \bar{\mathbf{I}}$ , on a donc  $\bar{\mathbf{p}} : \nabla \mathbf{u} = p(\nabla \cdot \mathbf{u})$ .

Il est intéressant de noter que cette équation décrit, en réalité (ou de manière équivalente) la production d'entropie du système. On peut le voir en introduisant l'entropie d'un gaz parfait de particules ponctuelles (c'est la formule de Sackur-Tetrode),

$$S(n, T) = k \left[ \ln \left( \frac{1}{n} \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \right) + \frac{5}{2} \right], \quad (104)$$

ou, puisque les constantes ne sont pas d'intérêt ici,

$$S(n, T) = k \ln \frac{T^{3/2}}{n} + cste. \quad (105)$$

L'évolution temporelle de l'entropie est donc donnée par (en utilisant eq.103),

$$\frac{dS}{dt} + \frac{k}{n} \frac{dn}{dt} = - \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}_{th}}{nT} - \frac{(\bar{\mathbf{p}} + \bar{\boldsymbol{\pi}}) : \nabla \mathbf{u}}{nT} + \frac{Q}{T}. \quad (106)$$

En utilisant la forme  $\mathbf{p} = (nkT)\bar{\mathbf{I}}$ , on obtient l'équation suivante :

$$\frac{dS}{dt} = - \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}_{th}}{nT} - \frac{\bar{\boldsymbol{\pi}} : \nabla \mathbf{u}}{nT} + \frac{Q}{T}. \quad (107)$$

Cette équation décrit l'augmentation de l'entropie (par particule) de la population considérée sous l'effet de trois types de processus irréversibles : la conduction thermique, la viscosité et l'échange de chaleur avec les systèmes environnants.

## B Appendice : Tenseur des contraintes de Maxwell

### B.1 Forme du tenseur

La densité volumique de force de Lorentz appliquée sur un élément de fluide de densité de charge  $\rho$  portant un courant volumique  $\mathbf{j}$  vaut  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ . Cette expression peut-être écrite, en toute généralité, comme la divergence d'un tenseur de rang 2  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_M$  fonction seulement des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , appelé tenseur des contraintes de Maxwell. L'emploi de cette forme peut-être très pratique en physique des plasmas, puisqu'elle permet de donner une forme particulièrement compacte à l'équation de conservation de l'impulsion (90), comme nous allons le voir. Nous cherchons ici la forme du tenseur  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_M$ .

On part de l'expression de la force de Lorentz volumique, dans laquelle on exprime les termes  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  en fonction des champs à l'aide des équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère :

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \quad (108)$$

On va chercher à "symétriser" cette expression, c'est-à-dire à lui donner une forme dans laquelle les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  interviennent à travers des termes de forme semblables. Pour cela on commence par noter que

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (109)$$

où l'on a introduit le vecteur de Poynting  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ . En utilisant cette expression, on voit que la densité de force de Lorentz prend la forme suivante

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 ((\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} ((\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (110)$$

où on a ajouté le terme en  $\text{div } \mathbf{B}$  (évidemment égal à zéro) pour souligner la symétrie de l'expression en  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . On utilise l'identité vectorielle suivante

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \nabla \left( \frac{\mathbf{A}^2}{2} \right) \quad (111)$$

pour obtenir l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \epsilon_0 ((\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} ((\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}) \\ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \nabla \left( \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right). \end{aligned} \quad (112)$$

Enfin, la formule du développement de la divergence d'un tenseur  $\nabla \cdot \mathbf{A}\mathbf{A} = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$  nous permet d'exprimer la densité de force sous une forme relativement compacte :

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_M - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (113)$$

où le tenseur des contraintes de Maxwell a l'expression suivante

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \epsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{E} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{\mu_0} - \left( \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) \bar{\mathbf{I}} \quad (114)$$

La partie diagonale de ce tenseur caractérise la pression électro-magnétique, qui s'exerce de manière isotrope et a pour expression

$$p_{em} = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \quad (115)$$

Les termes non-diagonaux sont les contraintes électro-magnétiques proprement dites (on parle aussi de tensions électromagnétiques pour décrire les effets de ces termes).

## B.2 Equation de la dynamique d'un plasma magnétisé

On considère un plasma magnétisé dans la limite d'électrons "sans masse"  $m_e \rightarrow 0$ . La somme des équations de la dynamique (90) pour les populations électroniques et ioniques donne immédiatement

$$\frac{\partial m n \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\Pi}} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (116)$$



où  $m$  et  $\mathbf{u}$  réfèrent à la population de protons, les contraintes "totales" valent  $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_e + \bar{\Pi}_p$  et où l'on a négligé les effets de viscosité, et toute autre force que la force de Lorentz. A l'aide des résultats de la partie précédente, on peut re-écrire cette équation comme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( nm\mathbf{u} + \frac{\mathbf{S}}{c^2} \right) + \nabla \cdot (\bar{\Pi} - \bar{\sigma}_M) = 0 \quad (117)$$

qui décrit la conservation de la quantité de mouvement du système constitué des particules et du champ électro-magnétique. On peut noter que les contraintes de Maxwell apparaissent dans cette équation comme un terme de "pression négative".

En régime stationnaire, qui est utile dans un grand nombre d'application, l'équation de la dynamique du plasma se réduit donc à une équation très simple décrivant la compensation en tout point des termes de contraintes des particules et du champ

$$\nabla \cdot (\bar{\Pi} - \bar{\sigma}_M) = 0. \quad (118)$$

Pour conclure cette partie, on peut noter que dans un plasma non-relativiste et quasi-neutre, la densité d'énergie électrique est toujours beaucoup plus faible que la densité d'énergie magnétique. En effet dans ce cas  $\mathbf{E} \sim \mathbf{U} \times \mathbf{B}$  où  $\mathbf{U}$  est la vitesse fluide typique du plasma. On a donc

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{B^2/\mu_0} \sim \frac{U^2}{c^2} \ll 1 \quad (119)$$

Le tenseur des contraintes se réduit donc, pour la grande majorité des applications plasma, à sa composante magnétique,  $\bar{\sigma}_M = (\mathbf{B}\mathbf{B} - B^2\bar{\mathbf{I}}/2)/\mu_0$ . Si on considère pour le plasma une pression scalaire  $p = p_e + p_p$  (i.e. on néglige les contraintes internes non-diagonales  $\bar{\pi}$ ), on a  $\bar{\Pi} = nm\mathbf{u}\mathbf{u} + p\bar{\mathbf{I}}$  et on obtient directement de (118) la description de la dynamique

$$\nabla \cdot \left( nm\mathbf{u}\mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{\mu_0} + \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \bar{\mathbf{I}} \right) = 0. \quad (120)$$

C'est une équation de conservation très pratique pour décrire l'état d'un système magnéto-hydrodynamique en régime stationnaire.

### B.3 Moment angulaire du vent solaire

On reprend dans cette partie le calcul effectué dans la section 4.6 à l'aide de la relation tensorielle obtenue à la question précédente. On considère que les champs de vecteurs n'ont de composantes que selon  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\phi$ , et qu'ils ne sont fonction que de la distance  $r$  au centre du soleil (et du repère). Sous ces conditions, l'expression de la divergence tensorielle en coordonnées sphériques est

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} = \left( \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{2T_{rr} - T_{\phi\phi}}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + \frac{3T_{r\phi}}{r} \right) \mathbf{e}_\phi \quad (121)$$

L'annulation de la composante azimutale de l'équation (120) impose

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left( r^3 n m u_r u_\phi - \frac{r^3 B_r B_\phi}{\mu_0} \right) = 0. \quad (122)$$

En utilisant la conservation du flux de masse  $r^2 n m u_r = cste$ , on retrouve directement le résultat

$$\frac{d}{dr} \left( r u_\phi - \frac{r B_r B_\phi}{n m u_r \mu_0} \right) = 0. \quad (123)$$

Exercice (pas trop dur avec ce formalisme) : montrer, par exemple en considérant un tenseur de pression de la forme  $\bar{\mathbf{p}} = p_{\parallel} \mathbf{b}\mathbf{b} + p_{\perp} (\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{b}\mathbf{b})$  (où  $\mathbf{b}$  est le vecteur unitaire le long du champ magnétique) qu'une anisotropie des fonctions de distribution des particules contribue au moment angulaire par unité de masse du vent solaire.