Le courant de déplacement

Les quatre équations de Maxwell telles qu'introduites dans les chapitres précédents :

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \qquad \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

L'équation de Maxwell-Ampère a une conséquence sur la forme des sources : elle impose que la divergence de la densité de courant soit nulle. Or on a vu précédemment que cela n'était vrai que dans le cas statique. Dans le cas général, un bilan de charge sur un volume fermé nous montre que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{j} = 0$$

Le respect de la conservation de la charge impose donc de modifier l'équation de Maxwell-Ampère, en y ajoutant à droite un terme dont la divergence vaut $d\rho/dt$. D'après Maxwell-Gauss, ce terme, nommé « ***courant de déplacement*** », vaut

$$\vec{j_D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Les équations de Maxwell dans leur forme présentée ci-dessus (négligeant le courant de déplacement j_D) sont dite dans « ***l'approximation des régimes quasi-stationnaires*** » (ARQS)

Courant de déplacement vs courant de conduction

$$\vec{\jmath} = \gamma\,\vec{E} \qquad \text{courants de conduction}$$

$$\vec{\jmath}_d = \varepsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{courants de déplacement}$$

Evaluons l'amplitude respective des courants de conduction et de déplacement, pour des variations temporelle de champ sur une échelle de temps typique ω^{-1}.

$$\gamma\,||\vec{E}_0|| \qquad \text{amplitude des courants de conduction}$$

$$\omega\,\varepsilon_0\,||\vec{E}_0|| \qquad \text{amplitude des courants de déplacement}$$

Le ratio amplitude du courant de conduction / amplitude du courant de déplacement vaut, pour ω = 2π.1 MHz :

$$\alpha \;= 1,1.10^{12} \gg 1 \quad \text{pour le cuivre}$$

$$\alpha \;= 1,8 \simeq 1 \quad \text{pour le sol argileux}$$

$$\alpha \;= 1,8.10^{-2} \ll 1 \quad \text{pour le verre}$$

Le courant de déplacement est en général négligeable dans les conducteurs (où l'ARQS est donc en général valable), et dominant dans les isolants

Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

On définit l'approximation des régimes stationnaires comme

$$\frac{L}{cT} \ll 1$$

Où L est la taille typique du système considéré, et T la période du phénomène considéré. Cette approximation revient donc à considérer le système très petit devant la longeur des ondes électromagnétiques, autrement dit à négliger les effets de propagation du champ.

Dans cette approximation, le terme de courant de déplacement est négligable dans l'équation de Maxwell-Ampère

$$B \sim \mu_0 L I + \frac{L}{cT}\frac{E}{c} \sim \mu_0 L I$$

On en déduit que dans l'ARQS, la densité de courant est a divergence nulle. Cette approximation a été faite de manière implicite dans le cours sur l'électrocinétique, lorsqu'on a écrit la conservation du courant, et donc la loi de nœuds.

Conséquence sur le théorème d'Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit donc, de manière générale (hors ARQS)

$$\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

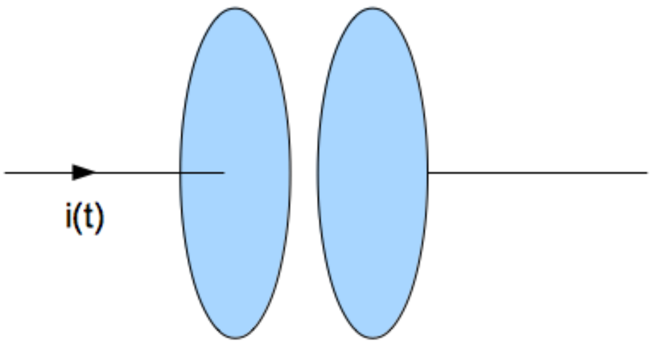
Ainsi, le théorème d'Ampère se généralise en régime variable dans le temps :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I_{enl} + \frac{1}{c^2} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

Où S est une surface appuyée sur le contour C, respectant la règle d'orientation de Stokes.

L'équation de Maxwell-Gauss n'étant pas modifiée, sa forme intégrale ne l'est pas non-plus : le théorème de Gauss reste valable dans les régimes variables dans le temps

Champ électromagnétique dans un condensateur plan



Les deux plaques sont séparées par un isolant : le courant qui traverse le condensateur n'est pas un courant de conduction, mais de déplacement (c'est pourquoi il est nul en régime continu)

Le champ E dans le condensateur vaut : $\overrightarrow{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} = \frac{Q(t)}{\pi a^2 \varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$ (on néglige les effets de bord)

D'après les considérations de symétrie et invariances : $\overrightarrow{B}(M,t) = B(r,z,t)\,\overrightarrow{u_\theta}$

L'application du théorème d'Ampère généralisé entre les armatures (r<a) nous donne :

$$2\pi r\, B(r,z,t) = \mu_0 \dot{Q}\,\frac{r^2}{a^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{B(r,z,t) = \frac{\mu_0 \dot{Q}\, r}{2\pi\, a^2}}$$

Rapport cB/E ?

Pour i(t) = I_0 cos(ωt), on obtient les expressions des champs :

$$\vec{E}(t) = \frac{I_0}{\omega\pi a^2\varepsilon_0} sin(\omega t)\vec{u_z} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}\cos(\omega t)\vec{u_\theta}$$

Equations de Maxwell et équation d'onde

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \qquad \vec{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Équations de Maxwell, avec leurs termes sources (néanmoins parfois dites « dans le vide », par opposition à leur forme « dans les milieux »)

On utilise l'identité $\vec{\text{rot}}\ \vec{\text{rot}} = \vec{\text{grad}}\ \text{div} - \vec{\Delta}$

Et on obtient :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overrightarrow{grad}\rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

et

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{rot}\vec{j}$$

En l'absence de source, on reconnaît l'équation de d'Alembert, caractérisant des ondes se déplaçant à la vitesse c : **le champ (E,B) se propage** *(il rayonne)*

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\Delta}\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \vec{\Delta}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned}}$$

Propagation dans un conducteur ?

Si on refait notre « rot de rot », mais qu'on se place maintenant dans un conducteur, c'est à dire un milieu neutre (ρ=0, sur les échelles de temps qu'on va considérer) et où le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction j = γE :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il s'agit **d'une équation de diffusion**, de coefficient D = 1/(μ_0γ). On suppose que le conducteur occupe le demi-espace z>0, on cherche une solution de la forme E = $\underline{E}$(z)$e^{i\omega t}$:

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} - i\omega\mu_0\gamma\underline{E} = 0$$

d'où $\underline{E}(z) = Ae^{z/\lambda} + Be^{-z/\lambda}$ avec $\lambda^{-1} = \sqrt{i\omega\mu_0\gamma} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}$

On a donc une solution augmentant exponentiellement (pas physique…) et une solution amortie : le champ ne peut pénétrer le conducteur que sur une longueur caractéristique, dite « **épaisseur de peau** » .

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}}$$

Cuivre à 50 Hz : 9 mm
Cuivre à 1 MHz : 64 µm

Eau de mer à 1 MHz : 50 cm
Eau de mer à 80 Hz (VLF) : 56 m

Potentiels électromagnétiques, transformation de jauge

Comme on l'a vu précédemment, on peut déduire de l'équation de conservation du flux magnétique et de l'équation de Maxwell-Faraday la forme générale liant les potentiels aux champs :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}V$$

Le potentiel vecteur A est donc défini au gradient d'une fonction quelconque λ(x,y,z ; t) près : la transformation

$$\overrightarrow{A'} = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\lambda$$

ne change pas l'observable B. Comment doit être modifié le potentiel scalaire pour que le champ E soit lui aussi inchangé ?

$$-\vec{\text{grad}}\ V' - \frac{\partial \vec{A'}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Les champs sont donc invariants donc sous ***la transformation de jauge*** :

$$\overrightarrow{A'} = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\lambda$$

$$V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Equations aux potentiels

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, en fonction des potentiels :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A}\right) - \vec{\Delta}\vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Qu'on peut reformuler

$$\vec{\Delta}\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

De même pour l'équation de Maxwell-Gauss :

$$div\left(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Qu'on peut reformuler:

$$\Delta V - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left[div\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right]$$

Deux choix de jauge apparaissent « clairement » pour simplifier ces équations

Choix d'une jauge

On choisit la jauge à simplifier autant que possible le calcul des potentiels pour une situation donnée. Deux jauges sont couramment utilisées

Jauge de Coulomb : $div\ \vec{A} = 0$

L'équation de Poisson de l'électrostatique est alors valable (il peut sembler étrange que V ne se « propage pas » mais réponde instantanément à un changement du terme source dans le cadre de cette jauge – cependant on peut bien vérifier que les champ E et B se propagent bien). Cette jauge est souvent utilisée dans les situations statiques.

Jauge de Lorenz : $div\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$

Cette jauge **découple** et « symétrise » les équations d'évolution des potentiels électromagnétiques. Elle est adaptée aux situations variables dans le temps (propagation d'ondes notamment) :

$$\vec{\Delta}\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\Delta V - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Trouver la fonction de jauge λ(x,y,z ; t)

Etant donnés un couple de potentiels ($\mathbf{A_0}$,V_0), quelle transformation appliquer pour se placer dans la jauge de Lorenz ou de Coulomb ? Autrement dit, comment trouver la fonction λ adéquate ?

Jauge de Coulomb : On veut que le nouveau potentiel vecteur vérifie $\mathrm{div}\ \vec{A} = 0$

donc $\mathrm{div}\ (\vec{A}_0 + \vec{\mathrm{grad}}\ \lambda) = 0$

λ est la solution de l'équation $\Delta\lambda = -\mathrm{div}\ \vec{A}_0$

Jauge de Lorenz : Le nouveau couple de potentiel doit vérifier $\mathrm{div}\ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

donc $\mathrm{div}\ (\vec{A}_0 + \vec{\mathrm{grad}}\ \lambda) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(V_0 - \frac{\partial \lambda}{\partial t}) = 0$

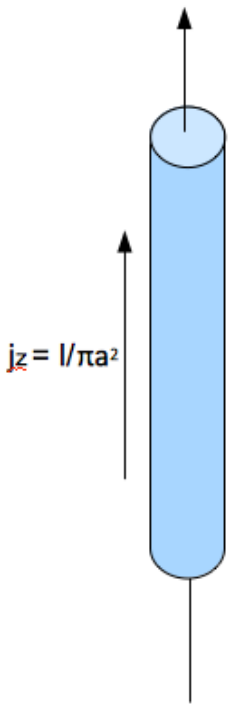
λ est la solution de l'équation $\Delta\lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}\lambda = -\mathrm{div}\ \vec{A}_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial V_0}{\partial t}$

Equation de Poisson pour le potentiel vecteur

En régime stationnaire, on voit que le potentiel vecteur A est solution, tout comme le potentiel scalaire, d'une équation de Poisson

$$\vec{\Delta}\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

On peut utiliser cette propriété pour simplifier, dans certain cas, le calcul du champ magnétique, par analogie avec les résultats obtenus en électrostatique.



<u>Exemple du fil parcouru par un courant I.</u>

La composante z de A est solution de l'équation $\Delta A_z = -\dfrac{\mu_0 I}{\pi a^2}$

Qui est analogue à l'équation de Possion pour le potentiel crée par un cylindre de charge uniforme $\rho = \dfrac{I}{\pi a^2 c^2}$

Le résultat était $V(r) = -\dfrac{\pi a^2 \rho}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) \Rightarrow A_z(r) = -\dfrac{I}{2\pi c^2 \varepsilon_0}\ln(r)$

Et donc $\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{A} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$

Equations de Maxwell : Aspects énergétiques

Puissance cédée par le champ à la matière : Le champ interagit par le biais de la force de Lorentz. On a

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La puissance cédée à un élément de volume infinitésimal dτ vaut donc

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v} = \rho d\tau \vec{v} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Conservation de l'énergie W du champ dans un volume V :

$$-\frac{dW}{dt} = \wp_{cédée\ à\ la\ matière} + \wp_{rayonnée}$$

La **puissance rayonnée** est celle qui sort de la surface fermée S délimitant le volume V considéré. On peut l'écrire comme le flux à travers S d'une *densité de courant d'énergie* (analogie avec la densité de courant j pour la conservation de la charge*)* , que l'on nomme pour le moment Π

$$\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t} d\tau = -\iiint_V \vec{j}.\vec{E} d\tau - \oiint_S \vec{\Pi}.d\vec{S}$$

(on a introduit la densité volumique d'énergie w)

On peut réécrire cette équation sous forme locale, à l'aide du théorème d'Ostogradsky :

Equation de conservation de l'énergie du champ : $$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Equations de Maxwell : Aspects énergétiques

On cherche à exprimer w et Π en fonction de E et B. **On prend le produit scalaire de Maxwell-Ampère par E**

$$\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}\right).\vec{E} = \mu_0\,\vec{j}.\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}$$

On utilise l'identité $div\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\,\vec{E} - \vec{E}.\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$

Et on obtient $\vec{B}.\overrightarrow{rot}\,\vec{E} - div\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right) \quad = \quad \mu_0\,\vec{j}.\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}$

On exprime le rotationnel de B à l'aide de Maxwell-Faraday, pour obtenir :

$$div\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \vec{j}.\vec{E} = 0$$

Tout comme elles contiennent la conservation de la charge, les équations de Maxwell contiennent la conservation de l'énergie électromagnétique. Par identification des termes, on a :

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$ **<u>Densité d'énergie électromagnétique</u>**

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$ **<u>Vecteur de Poynting</u>**

Condensateur : bilan énergétique

On reprend l'expression des champs obtenus précédemment :

$$\vec{E}(t) = \frac{I_0}{\omega\pi a^2\varepsilon_0} sin(\omega t)\vec{u_z} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}\cos(\omega t)\vec{u_\theta}$$

On obtient la densité d'énergie électrique, et l'énergie moyenne stockée :

$$w_e = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{I_0}{\omega\pi a^2}\right)^2 \sin^2(\omega t) \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{E}_e \rangle = \frac{I_0^2 \ell}{4\pi\varepsilon_0 a^2\omega^2}$$

De même pour la densité d'énergie magnétique, et l'énergie magnétique moyenne stockée (attention, l'intégrale sur le volume est plus compliquée, puisque B dépend de r)

$$w_m = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I_0 r}{2\pi a^2}\right)^2 \cos^2(\omega t) \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{E}_m \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 \ell}{32\pi}$$

On en déduit le rapport des énergies électriques et magnétiques

$$\alpha = \frac{\langle \mathcal{E}_m \rangle}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} = \frac{a^2\omega^2}{8\,c^2}$$

Condensateur : puissance rayonnée ?

On reprend l'expression des champs obtenus précédemment :

$$\vec{E}(t) = \frac{I_0}{\omega\pi a^2\varepsilon_0} sin(\omega t)\vec{u_z} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}\cos(\omega t)\vec{u_\theta}$$

On calcule le vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = -\frac{I_0^2 r}{2\pi^2 a^4 \varepsilon_0 \omega}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\vec{u_r}$

La puissance qu'il rayonne est égale au flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale du condensateur :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \int_{S_{\text{lat}}} \vec{\Pi}(r=a,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$$

On obtient $\mathcal{P}_{ray} = \frac{I_0^2 \ell}{\pi a^3 \epsilon_0 \omega}\cos(\omega t)\sin(\omega t)$

En moyenne cette puissance est nulle… c'est dû à la forme imposée pour le champ électrique (et par conséquent magnétique) : on a négligé les effets de bord…