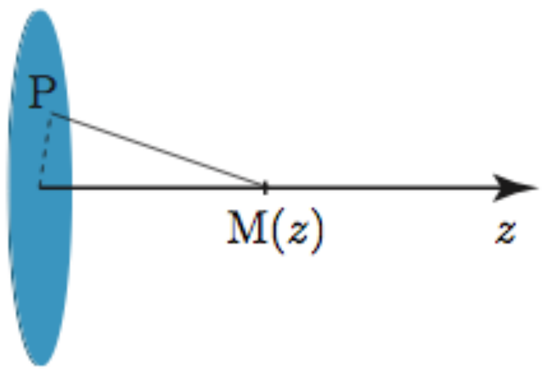
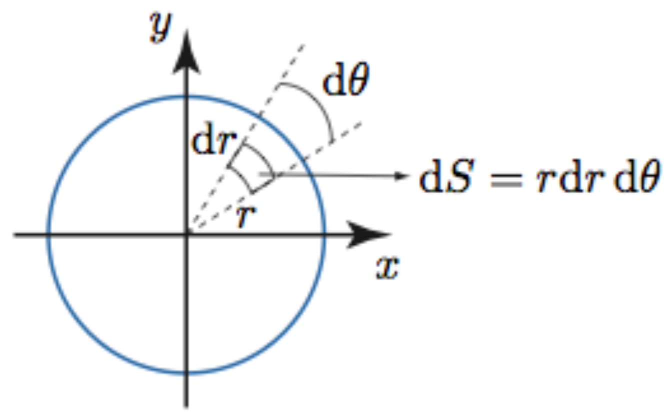
Calcul de champ électrique : exemple simple

- **<u>On cherche le champ électrique crée par un disque uniformément chargé en surface, sur l’axe de ce disque</u>**





- Considérations de symétries : $\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) = \mathrm{E}(z)\,\vec{e_z}$
- Projection sur l’axe z : $\vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{e_z} = \mathrm{E}(z) = \dfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\iint_{\mathrm{P}} \mathrm{dS}\,\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z}}{\mathrm{PM}^3}$
- Elément de surface dS : $\mathrm{dS} = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$
- On obtient : $\mathrm{E}(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \sqrt{\dfrac{z^2}{z^2+\mathrm{R}^2}}\right)$

Calcul de champ électrique : le théorème de Gauss

- Dans des cas géométriquement « simples » (présentant des symétries et invariances), il est souvent plus simple d'utiliser le théorème de Gauss que de calculer des intégrales multiples.

- **<u>Ce théorème s'exprime :</u>**

$$\boxed{\oiint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = \frac{\mathrm{Q}_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}}$$

<u>Le Flux du champ électrique à travers toute surface fermée est égal à la charge contenue dans le volume délimité par la surface fermée, divisée par la permittivité du vide.</u>

Notion de flux et d'angle solide

Notion de flux

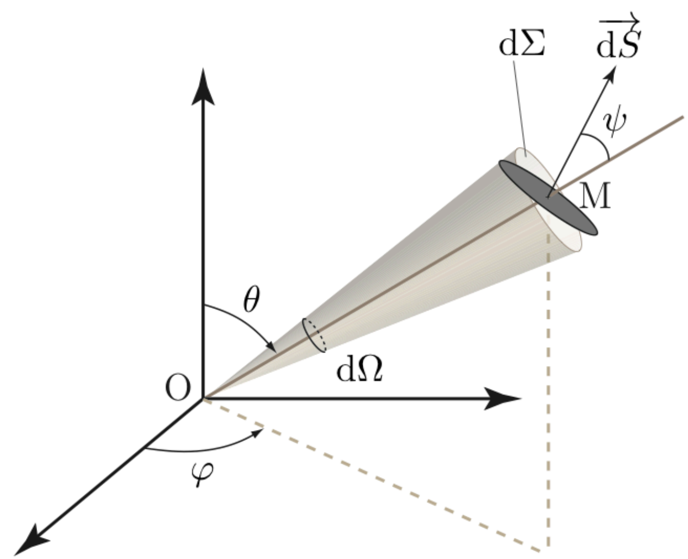
On appelle flux d'un champ de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ à travers une surface $\mathscr{S}$ la quantité (algébrique)

$$\Phi = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

Le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle q placée à l'origine, à travers une surface $\mathscr{S}$ s'écrit

$$\Phi_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathscr{S}} \frac{\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}}{r^2}$$

On introduit **<u>l'angle solide :</u>** $\Omega = \iint_{\mathscr{S}} \frac{\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}}{r^2}$



<u>Propriétés :</u> l' angle solide d'une surface fermée vue depuis l'intérieur de celle-ci vaut 4π. Vue depuis l'extérieur de celle-ci vaut zéro.

Démonstration du théorème de Gauss

Le flux du champ crée par une charge q à travers une surface vue sous un angle solide Ω vaut

$$\Phi_q = \frac{q\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$$

Le flux à travers une surface d'un ensemble de charges q_i vaut donc

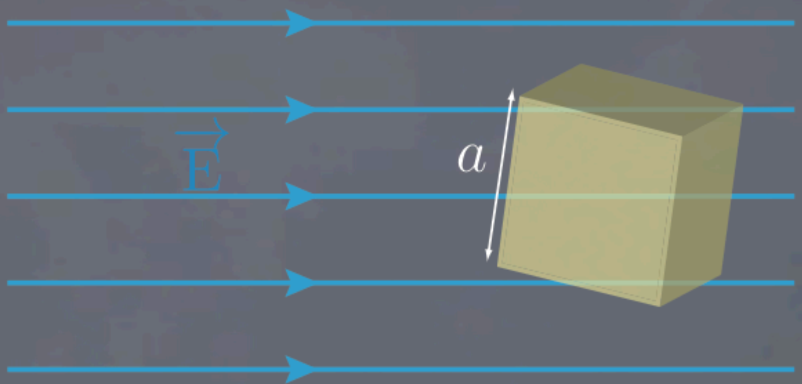
$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\Omega_i$$

Si l'on considère une surface fermée, Ω_i vaut zéro si la charge q_i est extérieure au volume délimité par la surface, et 4π si elle est à l'intérieure. On obtient donc le résultat souhaité

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times 4\pi \sum_{q_i \in \mathscr{S}} q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Flux

On plonge une surface imaginaire de forme cubique dans un champ électrique uniforme et constant $\overrightarrow{E}$.

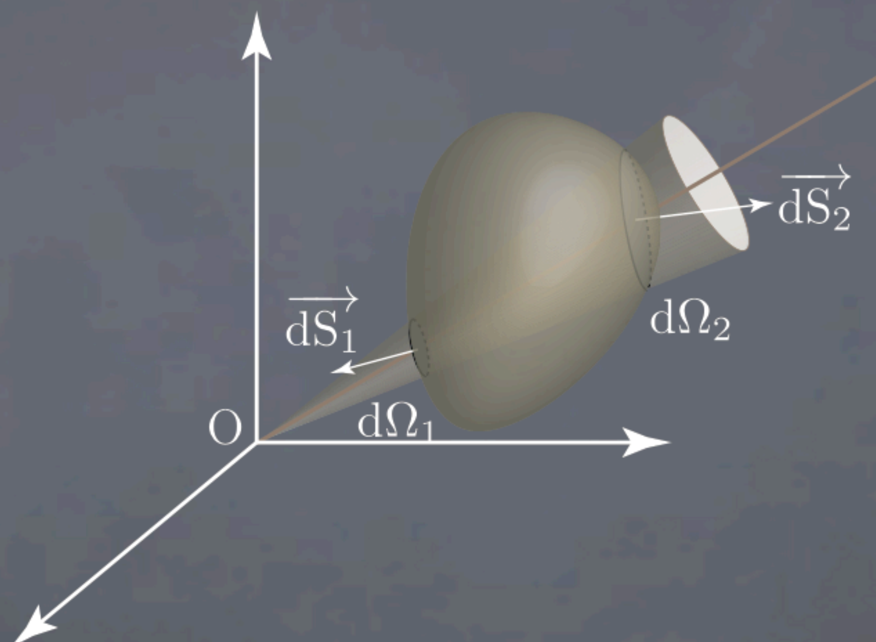


Le flux du champ électrique à travers le cube vaut

1. Ea^2
2. $-Ea^2$
3. $2Ea^2$
4. $-2Ea^2$
5. $6Ea^2$
6. $-6Ea^2$
7. Zéro
8. Cela dépend de l'orientation du cube avec les lignes de champ.

Angle solide

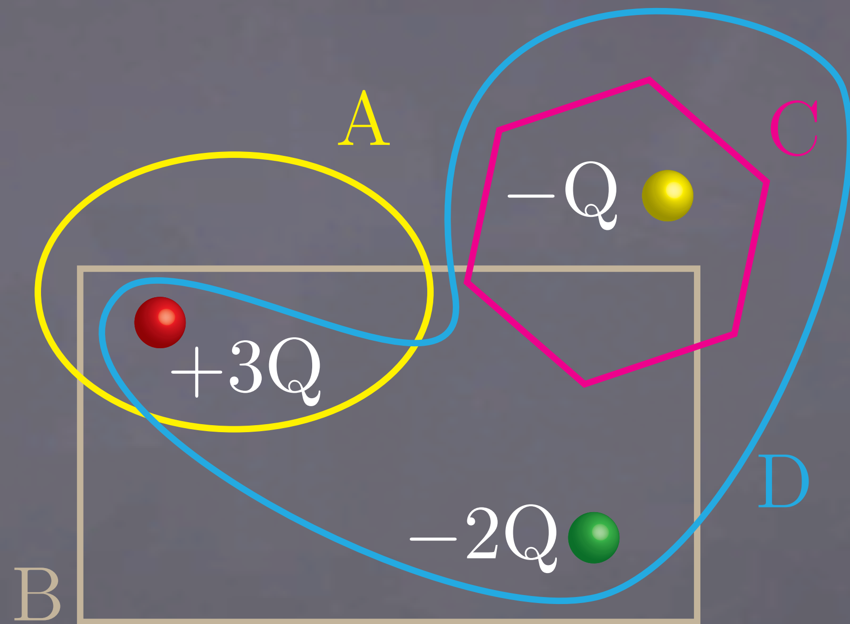
Que dire des angles solides élémentaires $d\Omega_1$ et $d\Omega_2$?



1. $d\Omega_1 = d\Omega_2$
2. $d\Omega_1 = -d\Omega_2$
3. On ne peut pas conclure, cela dépend des directions $\overrightarrow{dS_1}$ et $\overrightarrow{dS_2}$

Théorème de Gauss

Les surfaces A, B, C et D sont supposées fermées. Quelle surface possède le plus grand flux du champ électrique ?



1. A=B=C=D
2. C>B>A>D
3. A>B=D>C
4. C>B>A=D
5. Aucune de ces solutions

Théorème de Gauss

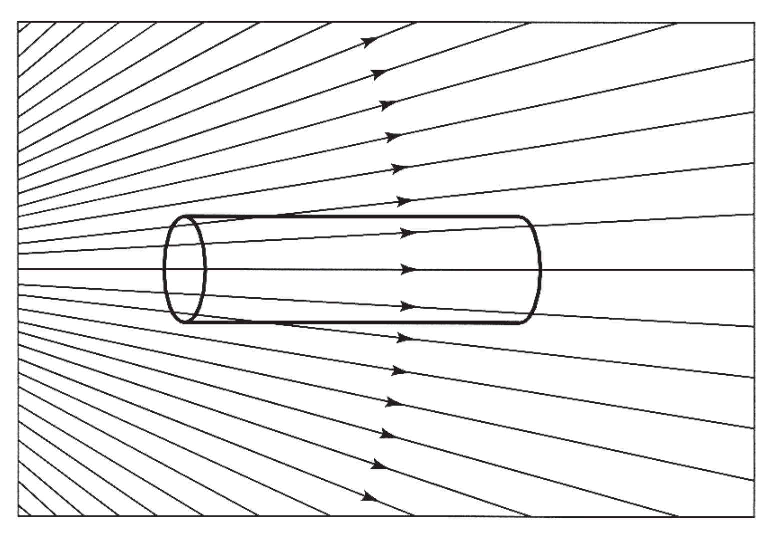
On considère une charge q et une surface de Gauss sphérique $\mathscr{S}$ de rayon R légèrement décentrée par rapport à la charge q.

À quelle étape le raisonnement suivant est-il faux ?

1. $\displaystyle\oiint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$
2. $\displaystyle\oiint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$
3. $\displaystyle\oiint_{\mathscr{S}} E\,\mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$
4. $\displaystyle E\oiint_{\mathscr{S}} \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$
5. $\displaystyle E\,4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$
6. toutes les étapes sont correctes

Théorème de Gauss

Que peut-on dire du flux du champ électrique à travers la surface cylindrique fermée représentée ci-dessous ?



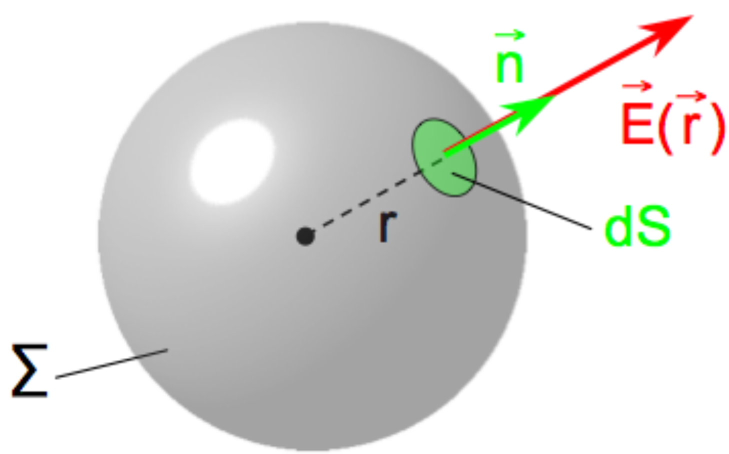
1. Il est positif
2. Il est négatif
3. Il est nul

La charge ponctuelle

On a démontré le théorème de Gauss en s'appuyant sur l'expression du champ crée par une charge ponctuelle.

Le théorème de Gauss est donc une reformulation (plus compacte et pratique) de l'expression du champ électrostatique, ou de la force de Coulomb.

On peut bien sûr faire le « chemin inverse » :



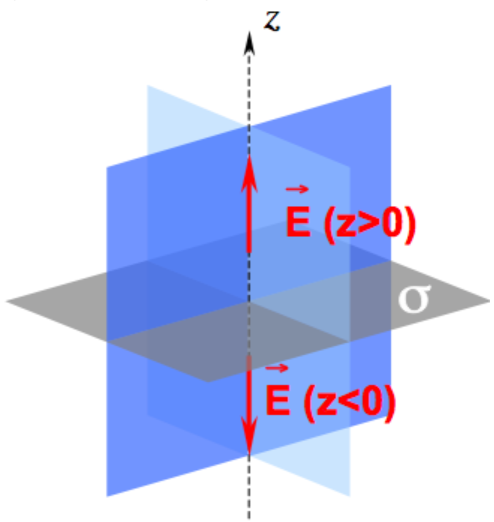
$$\oiint_\Sigma \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = E(r) \oiint_\Sigma dS = 4\pi r^2 E(r)$$

et $$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

d'où : $$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Le plan infini uniformément chargé

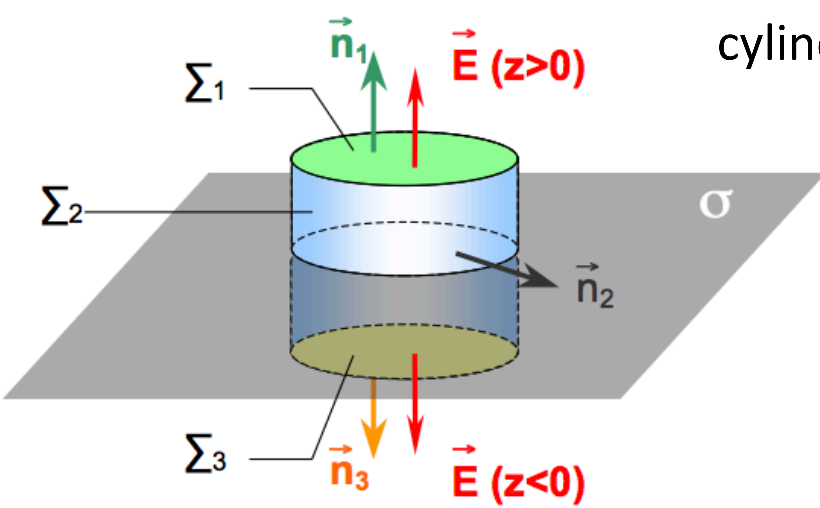
Analyse des symétries et invariances :



Invariances par translation suivant x et y : E = E(z)

Tout plan perpendiculaire au plan chargé est plan de symétrie : le vecteur E est selon ez

On choisit une surface de Gauss « pratique » étant données les symétries du problème : ici, un cylindre fait bien l'affaire



$$\phi = E(z)\,\pi r^2 + 0 + E(z)\,\pi r^2 = E(z)\cdot 2\,\pi r^2$$

Et $\dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma\,\pi r^2}{\varepsilon_0}$

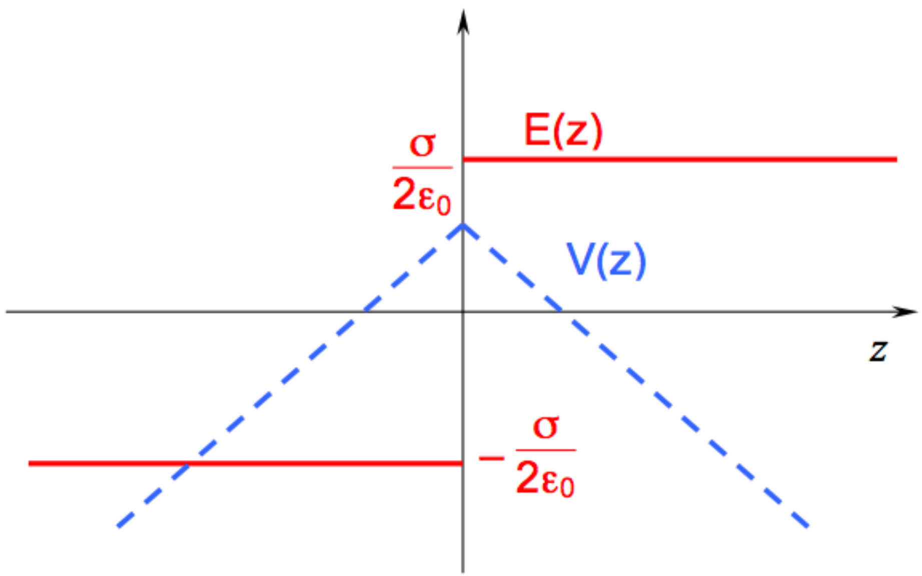
D'ou $E(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Le plan infini uniformément chargé

On peut calculer le potentiel associé :

$$E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \Rightarrow \quad V(z) = -\int E(z)\, dz$$

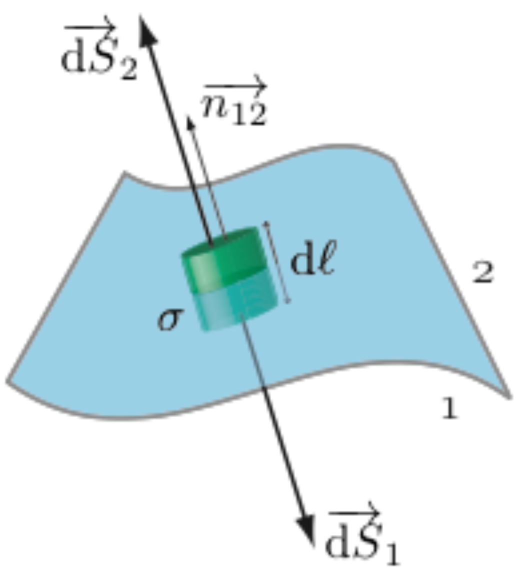
D'où $$V(z) = \pm\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}(+\ \mathrm{Const})$$



Discontinuité du champ à la traversée d'une surface chargée

On peut généraliser le calcul fait pour le plan infini à toute surface chargée, en prenant une surface de Gauss de taille infinitésimale (ie très petite devant le rayon de courbure de la surface considérée)

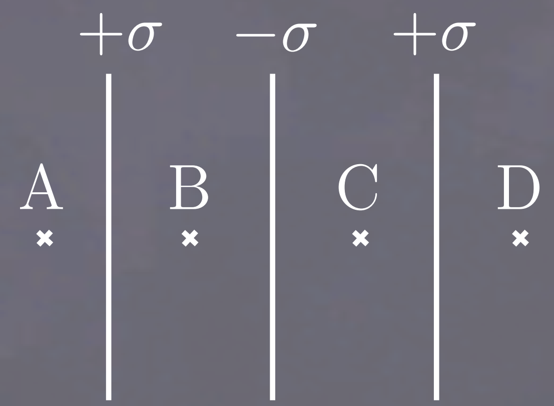
On obtient le résultat suivant, valable pour la composante normale du champ électrique dans un voisinage « infiniment » proche du plan :



$$\vec{n}_{12} \cdot \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Plan chargé

On considère trois plans infinis chargés.

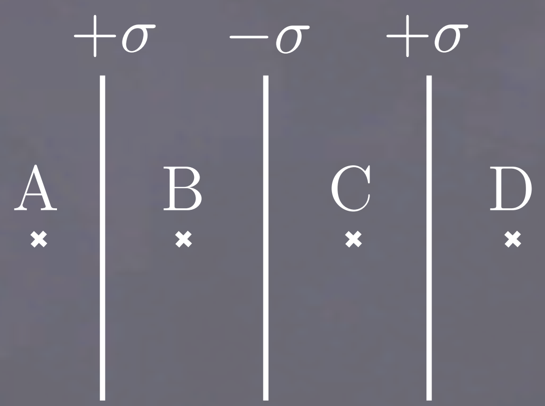


Quelle est la direction du champ électrique au point B ?

1. vers la droite
2. vers la gauche
3. le champ est nul

Plan chargé

On considère trois plans infinis chargés.

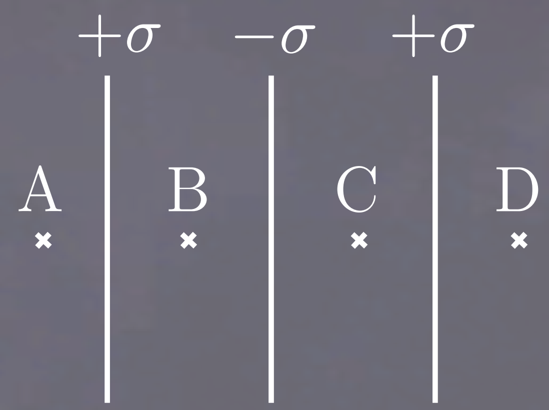


Quelle est la direction du champ électrique au point D ?

1. vers la droite
2. vers la gauche
3. le champ est nul

Plan chargé

On considère trois plans infinis chargés.

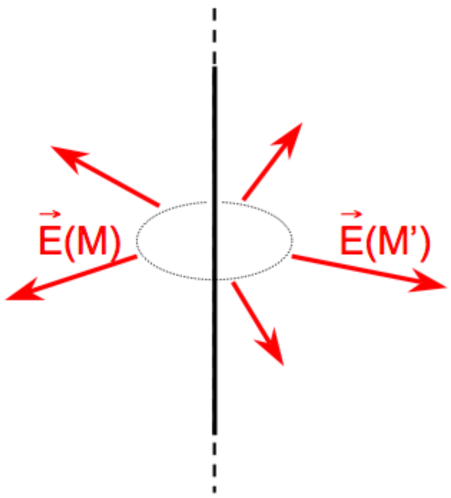


Quelle est la valeur de l'amplitude du champ électrique au point B ?

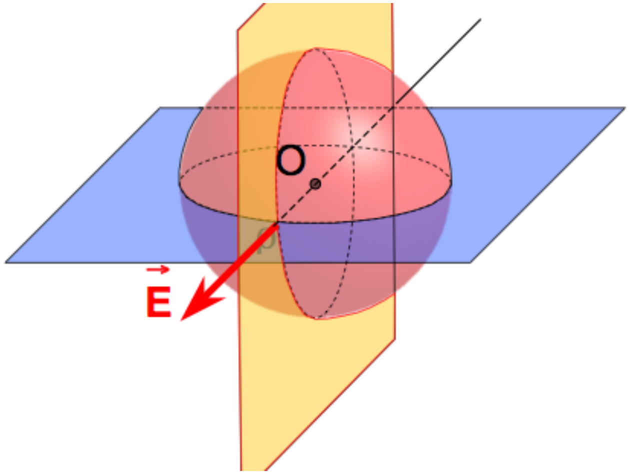
1. $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$
2. $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
3. $\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$
4. $\dfrac{2\sigma}{\varepsilon_0}$
5. $\dfrac{3\sigma}{\varepsilon_0}$
6. $\dfrac{\sigma}{3\varepsilon_0}$

Autres cas « simples » et typiques

- Le fil infini uniformément chargé (symétrie cylindrique)

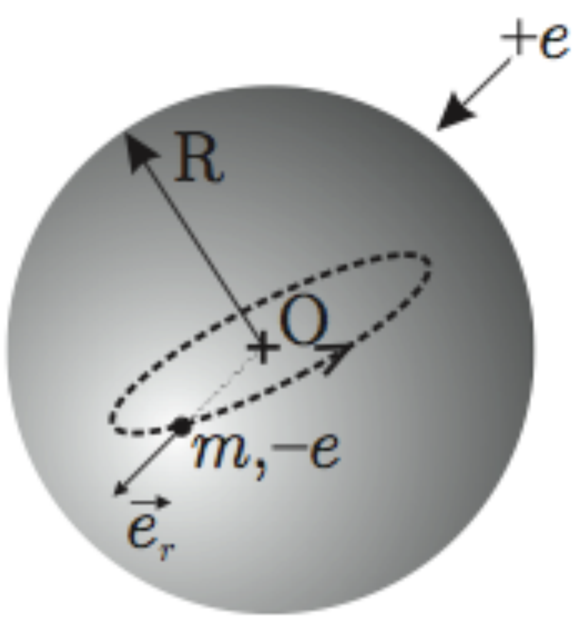


- La boule uniformément chargée (symétrie sphérique)



Modèle atomique de Thomson (1904)

- Thomson découvre l'électron en 1897, il cherche un modèle d'atome incluant ces « corpuscules » : il propose que la charges des électrons soit neutralisée par un nuage de « substance » de charge positive



- Charge volumique du nuage sphérique

$$\rho = 3e/4\pi\varepsilon_0 R^3$$

- Champ électrique interne

$$\mathrm{E}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^3}\, r$$

- Dynamique (1D) de l'électron donnée par

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi m \varepsilon_0 \mathrm{R}^3}$$

Modèle atomique de Thomson (1904)

- On cherche à estimer l'énergie d'ionisation : pour cela on commence par calcule le potentiel électrostatique dans l'atome

$$\mathrm{V}(r) = -\frac{e}{8\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^3} r^2 + \mathrm{C^{te}} \qquad \text{pour} \qquad r \leqslant \mathrm{R}$$

$$\mathrm{V}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{pour} \qquad r \geqslant \mathrm{R}$$

- La condition de continuité de V en r = R nous donne $Cte = \dfrac{3e}{8\pi\varepsilon_0 R}$

- D'où $V(r < R) = \dfrac{e}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)$

- La valeur moyenne de l'énergie potentielle de l'électron au cours du temps vaut donc, dans ce modèle 1D (a est le « rayon » de l'orbite)

$$E_p = \langle -eV(r) \rangle = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - a^2/2)$$

Modèle atomique de Thomson (1904)

- Le seul paramètre libre est R : environ 1 Angström : $\mathrm{T} \approx 4 \times 10^{-16}\ \mathrm{s}$
- Longueur d'onde associée : $\lambda = cT \simeq 118nm$
- Radiation UV Lyman-alpha = 121 nm

- Energie d'ionisation : E = 18 eV
- Energie d'ionisation « constatée » de l'atome d'hydrogène : E = 13.6 eV

- Evidemment c'est rustique, mais on ne tombe pas trop loin !

Relation locales entre champ et source : l'équation de Maxwell-Gauss

- On a vu et démontré le théorème de Gauss. Il s'agit **<u>d'une relation intégrale</u>** entre le champ E et sa source.

- On peut réécrire le théorème de Gauss en introduisant la charge volumique

$$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{P \in \mathscr{V}} \rho(P) \mathrm{d}\tau,$$

- Qui peut se réécrire, selon le théorème de Green-Ostogradsky (Théorème Flux-Divergence) :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- **<u>Il s'agit de l'équation de Maxwell-Gauss, valable en tout point de l'espace, à tout instant, dans un cadre statique comme dynamique.</u>**

Réécriture pour le potentiel : équations de Poisson et de Laplace

- Dans le cas statique, on a vu que le champ dérivait d'un potentiel scalaire,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$$

- L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit donc pour le potentiel sous la forme

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

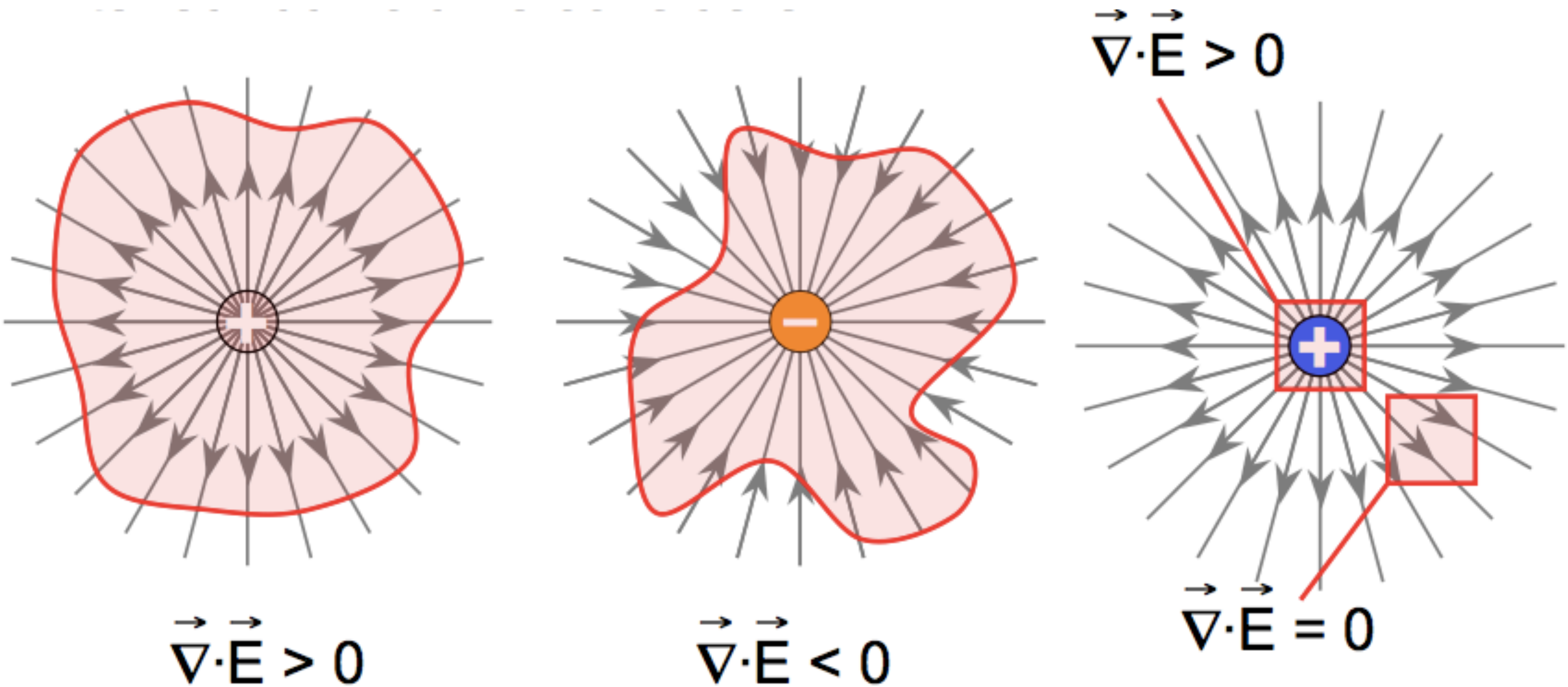
- Cette équation n'est à priori valable que dans le cas statique. Cependant, on peut se placer dans une jauge (c'est à dire faire *un choix particulier* de relation entre V et le potentiel vecteur A) telle que cette équation soit valable tout le temps. Ce choix de jauge est appelé **jauge de Coulomb**.

- En l'absence locale de charge volumique, l'équation de Poisson prend la forme de l'équation de Laplace

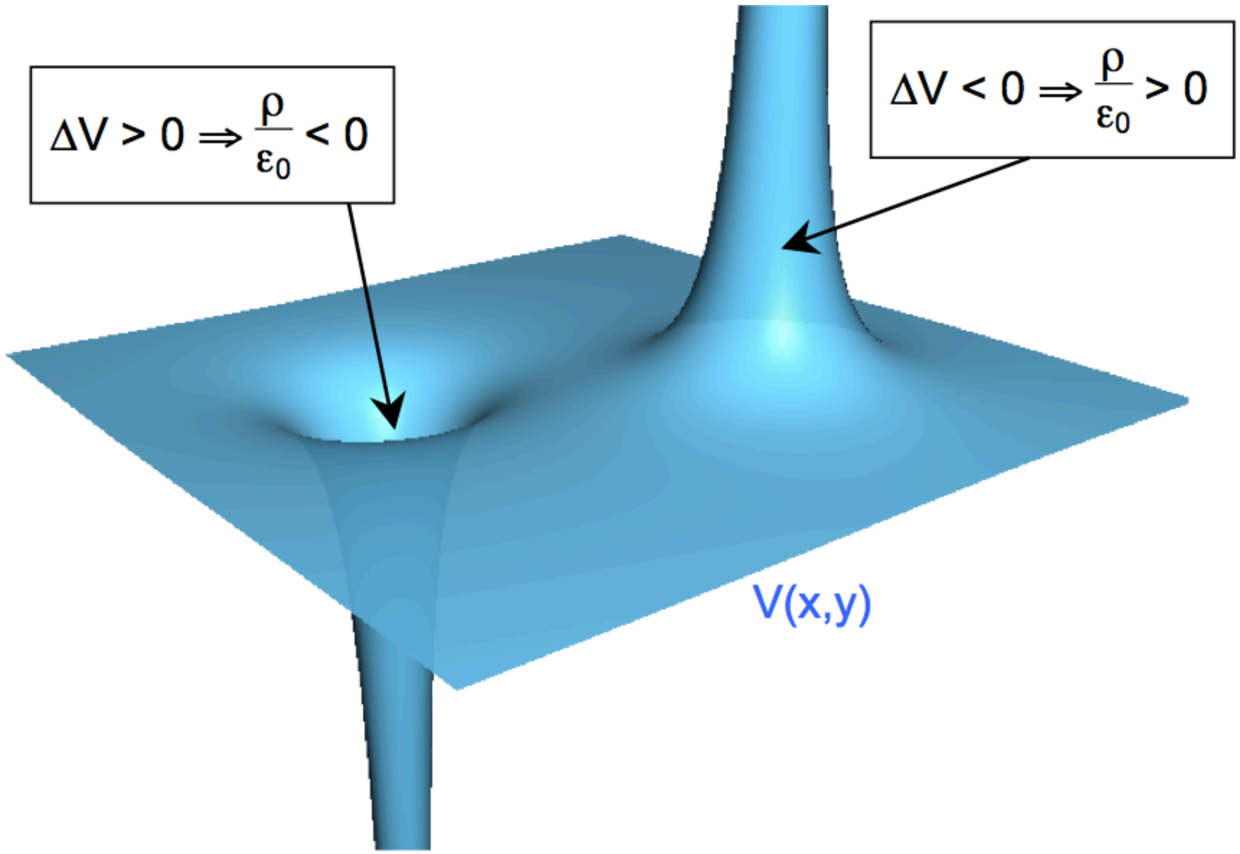
$$\Delta V = 0$$

Interprétation physique :
La divergence du champ E

- Lien entre présence locale de charge et notion de divergence



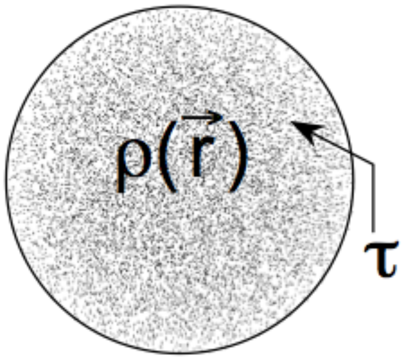
Interprétation physique :
Les extrema locaux du potentiel



- Exemple de potentiel en 2D d'un dipôle électrostatique (+Q et –Q)
- **<u>Il ne peut y avoir d'extrema local de potentiel en l'absence de distribution de charge localement non-nulle</u>**

Densité d'énergie électrostatique

- On a vu précédemment que l'énergie potentielle d'une distribution volumique de charge peut s'écrire



$$E_p = \frac{1}{2}\iiint_\tau \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, d\tau$$

- **<u>On se propose de montrer qu'on peut exprimer cette énergie indépendamment de la source, donc uniquement en fonction du champ E. D'après l'équation de Maxwell-Gauss :</u>**

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \mathrm{div}\vec{E}(\vec{r})V(\vec{r})d\tau$$

Densité d'énergie électrostatique

- On utilise l'identité vectorielle :

$$\mathrm{div}(V\vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}}V \cdot \vec{E} + V.\mathrm{div}(\vec{E})$$

- Et on obtient :

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_T \mathrm{div}(V\vec{E})d\tau - \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_T \vec{\mathrm{grad}}V \cdot \vec{E}d\tau$$

- Le théorme de Green-Ostogradsky nous donne le premier terme :

$$\iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{div}\,(\mathrm{V}\overrightarrow{\mathrm{E}})\mathrm{d}\tau = \oiint_{\mathscr{S}} \mathrm{V}\overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} \to 0 \text{ quand } \mathscr{V} \to \text{tout l'espace}$$

- Elle tend vers 0 lorsque le rayon typique R de cette surface tend vers l'infini, puisque « loin » de la distribution de charge, E décroit en R^2 et V en R. Il reste donc :

$$E_p = \iiint_{espace} \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2 d\tau$$

Energie interne d'une sphère chargée uniformément

- On modélise un électron comme une sphère de rayon R chargée uniformément en volume, de charge totale -e. Son « énergie électrostatique interne » vaudrait

$$E_{int} = \int_0^\infty \frac{\varepsilon_0}{2} E(r)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

- Où E(r) est le champ de la sphère uniformément chargée, déjà exprimé dans le cas de l'atome de Thomson. On peut aussi obtenir l'énergie interne à partir de l'expression du potentiel et de la charge volumique

$$E_{int} = \int_0^R \frac{\rho}{2} V(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

- Dans les deux cas, on obtient

$$E_{int} = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0} R^5 = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- Rayon classique de l'électron : $r_e = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \simeq 2.8 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}$

(contrainte exp : r < 10^-22 m)